

الى أبناء  
وطني

2016-2017

الطريق الى الـ 100  
حلول جميع الاسئلة  
الوزارية 1996-2016

السادس  
الاحيائي

قصي هاشم

07902162268





بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿وقل أعملوا فسير الله عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

**انطلاقاً من قول المصطفى (ص): ((زكاة العلم نشره وتعليمه))**

تضع شبكة مواقع رحلة التفوق في السادس التعليمية التربوية الخيرية بين ايديكم احدي اعمالها من ملازم مرحلة السادس الاعدادي هذه المرحلة الهامة والمصيرية في حياة ائتنا الطلبة وخاصة المتعافين منهم ولهم يتعذر عليه اقتناء هذه المساعدات المدرسية في محافظاتنا العراقية العزيزة بهدف النهوض وتطوير الواقع التعليمي ولو بالجزء اليسير.

اذ أن شبكتنا لاتقتصر عاى نشر الملازم المدرسية فقط أنها تقوم بنشر الدروس المرئية المجانية لكفاً التدريسيين بالاضافة الى مجموعة قنواتنا التدريسية وكذلك الارشادات والنصائح وطرق الدراسة الصحيحة هذا من جهة. أما من جهة أخرى فهو كسر لشوكة بعض المحسوبين على الكادر التدريسي ممن يرفضون نشر ملازمهم والتعاون مع ابنائهم الطلبة ليأخذوا من المال هدفاً أهم ويتناسوا مصلحة الطالب والواقع التعليمي المتدني.

علماً ان كادر الشبكة والقائمين عليها هم مجموعة من الشباب العراقي الواعي المثقف بالاضافة الى تعاون بعض المدرسين الكرام كما واننا غير تابعين لأي جهة كانت رسمية او غير رسمية انها سر تجهنا وعملنا هو خيري بحت املين من الله عز وجل ان يوفقنا لتقديم كل ما هو صالح لشعبنا و وطننا الحبيب.

**كادر شبكة رحلة التفوق في السادس**

٢٠١٥/٨/٢١

**اد: مينا الاحمد**

**اد: اشرف الوائلي**





الى أبناء  
وطني

2016-2017

عزيزي الطالب اعلم ان ...  
اذا اهدرت وقتك الان فلا تلم الا نفسك خدا  
اصبر على ما لاتحب من المواد من اجل ما لاتحب  
هذه الدنيا مسألة حسابية ... اجعل من اليوم عبرة ومن  
الامس خبرة ... اجمع لها الجد والاجتهاد  
واطرح منها التعب والشقاء  
واترك الباقي على رب السماء

ابتعد وسائل التسلية  
والترفيه عن مكان  
المذاكرة

قصي هاشم  
07902162268





حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الاول ( مجموعة الاعداد المركبة ) مرتبة حسب  
حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الاول ( مجموعة الاعداد المركبة ) مرتبة حسب  
تسلسل المنهج المقرر

1999 دور 1

جد بالصيغة العادية للعدد المركب  $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2$ 

$$\text{Sol: } \left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{(3-1) + (-3-1)i}{1+1}\right)^2 = \left(\frac{2-4i}{2}\right)^2$$

$$= (1-2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = -3 - 4i$$

2000 دور 1

إذا كانت  $x=2+3i$  ,  $y=3-i$  جد قيمة  $x^2 + 2y^2$ 

$$\text{sol: } x^2 + 2y^2 = (2+3i)^2 + 2(3-i)^2 = (4 + 12i + 9i^2) + 2(9 - 6i + i^2)$$

$$= (-5 + 12i) + 2(8 - 6i) = (-5 + 12i) + (16 - 12i) = 11 + 0i$$

2004 دور 1

جد الصيغة العادية للعدد المركب  $(1 - \sqrt{3}i)^2 - (2 - \sqrt{3}i)^2$ 

$$\text{sol: } (1 - \sqrt{3}i)^2 - (2 - \sqrt{3}i)^2 = (1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2) - (4 - 4\sqrt{3}i + 3i^2)$$

$$= (-2 - 2\sqrt{3}i) - (1 - 4\sqrt{3}i) = (-2 - 2\sqrt{3}i) + (-1 + 4\sqrt{3}i)$$

$$= -3 + 2\sqrt{3}i$$

2005 دور 1

جد ناتج بالصيغة الديكارتية  $(3+4i)^2 + (5-3i)(1+i)$ 

$$\text{sol: } (3+4i)^2 + (5-3i)(1+i) = (9 + 24i + 16i^2) + (5 + 5i - 3i - 3i^2)$$

$$= (-7 + 24i) + (8 + 2i) = 1 + 26i = (1, 26)$$

1998 دور 1

ضع بالصورة العادية للعدد المركب  $(1+3i)^2 + (3-2i)^2$ 

$$\text{sol: } (1+3i)^2 + (3-2i)^2 = (1 + 6i + 9i^2) + (9 - 12i + 4i^2)$$

$$= (-8 + 6i) + (5 - 12i) = -3 - 6i$$



2002 دور 1

ضع ما يأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي  $(3 + 2i)(-2 + i)$ 

$$\text{sol: } c = (3 + 2i)(-2 + i) = -6 + 3i - 4i + 2i^2 = -8 - i$$

$$c^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{-8-i} = \frac{1}{-8-i} \cdot \frac{-8+i}{-8+i} = \frac{-8+i}{64+1} = \frac{-8}{65} + \frac{1}{65}i$$

2003 دور 1

جد النظير الضربي للعدد المركب  $3 + 5i$  ثم ضعه بالصورة العادية .

$$\text{sol: } c^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3+5i} = \frac{1}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i} = \frac{3-5i}{9+25} = \frac{3}{34} - \frac{5}{34}i$$

2005 دور 2

إذا كانت  $x = -1 + 2i$  جد قيمة  $x^2 + 3x + 5$  بالصيغة الديكارتية ( ارجاند )

$$\text{sol: } x^2 + 3x + 5 = (-1 + 2i)^2 + 3(-1 + 2i) + 5$$

$$= (1 - 4i + 4i^2) + (-3 + 6i) + 5$$

$$= (-3 - 4i) + (2 + 6i) = -1 + 2i = (-1, 2) \text{ وهي صيغة ارجاند المطلوبة}$$

2009 دور 2

حل المعادلة  $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$ 

$$\text{sol: } z^4 + 13z^2 + 36 = 0 \Rightarrow (z^2 + 9)(z^2 + 4) = 0$$

$$\text{either } z^2 = -9 \Rightarrow z = \pm 3i \text{ OR } z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm 2i$$

2013 دور 1

جد قيمة  $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)$ 

$$\text{sol: } (1-i)(1-i^2)(1-i^3) = (1-i)(1+1)(1+i) = (2)(1+1) = (2)(2) = 4$$

2010 تمهيدي

إذا كان  $a + bi = \frac{2+i}{1-i}$  اثبت ان  $2(a^3 + b^3) = 7$ 

$$\text{sol: } a + bi = \frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+2i+i-1}{2} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \Rightarrow 2(a^3 + b^3) = 2\left(\frac{1}{8} + \frac{27}{8}\right) = 2\left(\frac{28}{8}\right) = 7$$

2012 دور 3

اثبت ان  $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$ 

$$\text{sol: } \frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{1-2i+i^2}{1+i} + \frac{1+2i+i^2}{1-i} = \frac{-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} + \frac{2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{-2i+2i^2}{1+1} + \frac{2i+2i^2}{1+1} = \frac{-2i-2}{2} + \frac{2i-2}{2} = (-1-i) + (-1+i) = -2$$



2012 دور 2

ضع بالصيغة العادية للعدد المركب  $(1+i)^5 - (1-i)^5$ 

$$\text{sol : } (1+i)^5 = (1+i)^4 (1+i) = [(1+i)^2]^2 (1+i) = (1+2i+i^2)^2 (1+i)$$

$$= (2i)^2 (1+i) = 4i^2 (1+i) = -4(1+i) = -4 - 4i$$

$$(1-i)^5 = (1-i)^4 (1-i) = [(1-i)^2]^2 (1-i) = (1-2i+i^2)^2 (1-i)$$

$$= (-2i)^2 (1-i) = 4i^2 (1-i) = -4(1-i) = -4 + 4i$$

$$(1+i)^5 - (1-i)^5 = (-4 - 4i) - (-4 + 4i) = (-4 - 4i) + (4 - 4i) = 0 - 8i$$

إذا كان  $x = 2i - 1$  جد قيمة  $x^2 + 2x + 6$ 

2007 خارج القطر

$$\text{sol : } x^2 + 2x + 6 = (-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 6$$

$$= (1 - 4i + 4i^2) + (-2 + 4i) + 6 = (-3 - 4i) + (4 + 4i) = 1 + 0i$$

ضع المقدار  $\frac{(1-i)^{13}}{64}$  بالصيغة العادية للعدد المركب

2013 خارج القطر

$$\text{sol : } \frac{(1-i)^{13}}{64} = \frac{(1-i)^{12} (1-i)}{64} = \frac{[(1-i)^2]^6 (1-i)}{64} = \frac{(1-2i+i^2)^6 (1-i)}{64}$$

$$= \frac{(-2i)^6 (1-i)}{64} = \frac{64 i^6 (1-i)}{64} = \frac{-64 (1-i)}{64} = -(1-i) = -1 + i$$

جد قيمتي  $x, y \in \mathbb{R}$  التي تحقق  $(2x+i)(y-2i) = -2-9i$ 

1996 دور 1

$$\text{sol : } (2xy + 2) + (-4x + y)i = -2 - 9i$$

$$2xy + 2 = -2 \Rightarrow 2xy = -4 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$-4x + y = -9 \Rightarrow y = 4x - 9 \quad \dots\dots\dots (2) \text{ في (1) نعوض}$$

$$2x(4x - 9) = -4 \Rightarrow [8x^2 - 18x + 4 = 0] \div 2 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$(4x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ اما } x = \frac{1}{4} \therefore y = 1 - 9 = -8$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \therefore y = 8 - 9 = -1$$

جد قيمتي  $x, y \in \mathbb{R}$  التي تحقق  $(2x+i)(y+2i) = 2+9i$  واجب بنفس الاسلوب

2006 دور 1

$$\text{Ans : } x = \frac{1}{4} \rightarrow y = 8, x = 2 \rightarrow y = 1$$



1998 دور 2

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين التي تحقق  $(2 + xi)(-x + i) = \frac{9y^2 + 49}{3y + 7i}$

**sol :**  $(2 + xi)(-x + i) = \frac{9y^2 + 49}{3y + 7i} \Rightarrow (-2x + 2i - x^2 i + x i^2) = \frac{9y^2 - 49i^2}{3y + 7i}$

$(-2x - x) + (2 - x^2)i = \frac{(3y - 7i)(3y + 7i)}{3y + 7i} \Rightarrow (-3x) + (2 - x^2)i = 3y - 7i$

$-3x = 3y \Rightarrow -x = y \dots (1)$

$2 - x^2 = -7 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$x = 3 \Rightarrow y = -3, x = -3 \Rightarrow y = 3$

1999 دور 2

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين التي تحقق  $(3x + 2yi)^2 = \frac{200}{4 + 3i}$

**sol :**  $(3x + 2yi)^2 = \frac{200}{4 + 3i} \Rightarrow 9x^2 + 12xyi + 4y^2 i^2 = \frac{200}{4 + 3i} \cdot \frac{4 - 3i}{4 - 3i}$

$(9x^2 - 4y^2) + (12xy)i = \frac{200(4 - 3i)}{25} \Rightarrow (9x^2 - 4y^2) + (12xy)i = 8(4 - 3i)$

$(9x^2 - 4y^2) + (12xy)i = 32 - 24i$

$9x^2 - 4y^2 = 32 \dots (1), 12xy = -24 \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \dots (2) \text{ in } (1)$

$9x^2 - 4\left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 32 \Rightarrow [9x^2 - \frac{16}{x^2} = 32] \cdot x^2$

$9x^4 - 16 = 32x^2 \Rightarrow 9x^4 - 32x^2 - 16 = 0$

$(9x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \text{either } 9x^2 + 4 = 0 \text{ غير ممكن لانه مجموع مربعين}$

OR  $x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow y = -1 \\ x = -2 \rightarrow y = 1 \end{cases}$

2000 دور 2

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين التي تحقق  $x(x + i) + y(y - i) + i = 13$

**sol:**  $(x^2 + xi) + (y^2 - yi) = 13 - i \Rightarrow (x^2 + y^2) + (x - y)i = 13 - i$

$x^2 + y^2 = 13 \dots (1), x - y = -1 \Rightarrow x = y - 1 \dots (2) \text{ in } 1$

$(y - 1)^2 + y^2 = 13 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 + y^2 - 13 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 2y - 12 = 0$

$y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow (y - 3)(y + 2) = 0$

either  $y = 3 \Rightarrow x = 3 - 1 = 2$  OR  $y = -2 \Rightarrow x = -2 - 1 = -3$



جد قيمتي  $x, y \in R$  التي تحقق  $\frac{2-i}{1+i}x + \frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}$

2004 دور 2

**sol:**  $\left(\frac{2-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}\right)y = \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i}\right)$

2005 دور 2

$$\left(\frac{(2-1)+(-2-1)i}{1+1}\right)x + \left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{4+1}\right)y = -i$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)x + (1-i)y = 0-i \Rightarrow \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}xi\right) + (y-yi) = 0-i$$

$$\left(\frac{1}{2}x + y\right) + \left(-\frac{3}{2}x - y\right)i = 0-i$$

$$\frac{1}{2}x + y = 0 \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y \dots\dots\dots (1)$$

$$-\frac{3}{2}x - y = -1 \Rightarrow -3x - 2y = -2 \dots\dots\dots (2)$$

$$6y - 2y = -2 \Rightarrow 4y = -2 \Rightarrow y = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = (-2)\left(\frac{-1}{2}\right) = 1$$

ملاحظة || اذا وجد  
i وحده في المقام  
يمكن ان نضرب  
البسط بالعدد (1)  
ونعبر عنه اما  $(-i^2)$   
او  $(i^4)$  ثم نختصر  
البسط مع المقام

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين التي تحقق  $(x+i)(y-3i) = -1-13i$

2006 تمهيدي

**sol:**  $xy - 3ix + iy - 3i^2 = -1 - 13i$

$$(xy + 3) + (-3x + y)i = -1 - 13i$$

$$xy + 3 = -1 \Rightarrow xy = -4 \dots\dots(1)$$

$$-3x + y = -13 \Rightarrow y = 3x - 13 \dots\dots (2) \text{ in } 1$$

$$x(3x - 13) = -4 \Rightarrow 3x^2 - 13x + 4 = 0 \Rightarrow (3x - 1)(x - 4) = 0$$

$$\text{either } x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3\left(\frac{1}{3}\right) - 13 = 1 - 13 = -12 \text{ OR } x = 4 \Rightarrow y = 12 - 13 = -1$$

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين التي تحقق  $(3x-i)(2y+i) + 11 = 7i$

2006 دور 2

**sol:**  $6xy + 3xi - 2yi - i^2 = -11 + 7i \Rightarrow (6xy + 1) + (3x - 2y)i = -11 + 7i$

$$6xy + 1 = -11 \Rightarrow 6xy = -12 \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \dots\dots (1) \text{ in } (2)$$

$$3x - 2y = 7 \dots\dots (2) \Rightarrow \left[3x + \frac{4}{x} = 7\right] \cdot x \Rightarrow 3x^2 + 4 = 7x$$

$$3x^2 - 7x + 4 = 0 \Rightarrow (3x - 4)(x - 1) = 0$$

$$\text{either } x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{-2}{\frac{4}{3}} = -2 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-3}{2} \text{ OR } x = 1 \Rightarrow y = -2$$



2008 دور 2

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتان التي تحقق  $y + 5i = (2x + i)(x + i)$ 

$$\text{sol: } y + 5i = 2x^2 + 2xi + xi + i^2 \Rightarrow y + 5i = (2x^2 - 1) + 3xi$$

$$2x^2 - 1 = y \dots (1), 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ in (1)} \Rightarrow 2\left(\frac{25}{9}\right) - 1 = y$$

$$y = \frac{50}{9} - 1 = \frac{50-9}{9} = \frac{41}{9}$$

2009 تمهيدي

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتان التي تحقق  $(3 + 2i)^2 y = (x + 3i)^2$ 

$$\text{sol: } (9 + 12i + 4i^2) y = (x^2 + 6ix + 9i^2)$$

$$(5 + 12i)y = (x^2 - 9) + 6ix \Rightarrow 5y + 12yi = (x^2 - 9) + 6ix$$

$$5y = x^2 - 9 \dots (1), 12y = 6x \Rightarrow x = 2y \dots (2) \text{ in 1}$$

$$5y = 4y^2 - 9 \Rightarrow 4y^2 - 5y - 9 = 0 \Rightarrow (4y - 9)(y + 1) = 0$$

$$\text{either } y = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{2} \quad \text{OR } y = -1 \Rightarrow x = -2$$

2010 دور 1

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتان التي تحقق  $12 + 5i = (x + 3i)(y - 2i)$ 

$$\text{sol: } 12 + 5i = xy - 2xi + 3yi - 6i^2 \Rightarrow 12 + 5i = (xy + 6) + (-2x + 3y)i$$

$$xy + 6 = 12 \Rightarrow xy = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{x} \dots (1) \text{ in 2}, -2x + 3y = 5 \dots (2)$$

$$-2x + 3\left(\frac{6}{x}\right) = 5 \Rightarrow -2x^2 + 18 = 5x \Rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0$$

$$(2x + 9)(x - 2) = 0$$

$$\text{either } x = \frac{-9}{2} \Rightarrow y = 6\left(\frac{-2}{9}\right) = \frac{-4}{3} \quad \text{OR } x = 2 \Rightarrow y = 3$$

قصي هاشم التميمي

Mob: 07902162268

6

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



2012 دور 1

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين اذا علمت ان  $\frac{5}{x+yi}$  ,  $\frac{2+i}{3-i}$  مترافقان

$$\text{sol: } \overline{\left(\frac{2+i}{3-i}\right)} = \frac{5}{x+yi} \Rightarrow \left(\frac{2-i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}\right) = \frac{5}{x+yi} \Rightarrow \left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{10}\right) = \frac{5}{x+yi}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{5}{x+yi} \Rightarrow 1 - i = \frac{10}{x+yi} \Rightarrow x + yi = \frac{10}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \Rightarrow x + yi = \frac{10(1+i)}{2}$$

$$x + yi = 5 + 5i \Rightarrow x = 5, y = 5$$

2015 دور 3

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين اذا علمت ان  $\frac{6}{x+yi}$  ,  $\frac{3+i}{2-i}$  مترافقان

$$\text{sol: } \left(\frac{3+i}{2-i}\right) = \frac{6}{x+yi} \Rightarrow \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}\right) = \frac{6}{x+yi} \Rightarrow \left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{5}\right) = \frac{6}{x+yi}$$

$$1 - i = \frac{6}{x+yi} \Rightarrow x + yi = \frac{6}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \Rightarrow x + yi = \frac{6(1+i)}{2}$$

$$x + yi = 3 + 3i \Rightarrow x = 3, y = 3$$

2012 خارج القطر

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين اذا علمت ان  $(1 + 2i)^2 = (x + yi) + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 

$$\text{sol: } \left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) + (x + yi) = (1 + 4i + 4i^2) \Rightarrow \left(\frac{1-2i-1}{1+1}\right) + (x + yi) = (1 + 4i - 4)$$

2015

$$(0 - i) + (x + yi) = -3 + 4i \Rightarrow (x) + (-1 + y)i = -3 + 4i$$

$$x = -3, -1 + y = 4 \Rightarrow y = 5$$

2003 دور 3

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين التي تحقق المعادلة  $\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$ 

$$\frac{x^2 - 4i^2}{x+2i} = \frac{y}{1+i} \Rightarrow \frac{(x-2i)(x+2i)}{x+2i} = \frac{y}{1+i} \Rightarrow x - 2i = \frac{y}{1+i}$$

الحل //

$$(x - 2i)(1 + i) = y \Rightarrow (x + 2) + (x - 2)i = y + 0i$$

$$x + 2 = y \dots\dots (1), \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 + 2 = 4$$



جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتان التي تحقق المعادلة  $\frac{125}{11+2i}x + (1-i)^2y = 11$

2016 تمهيدي

$$\text{sol: } \frac{125}{11+2i} \cdot \frac{11-2i}{11-2i} x + (1-2i+i^2)y = 11 \Rightarrow \frac{125(11-2i)}{125} x + (-2i)y = 11$$

$$(11x - 2xi) + (0 - 2yi) = 11 \Rightarrow (11x) + (-2x - 2y)i = 11 + 0i$$

$$11x = 11 \Rightarrow x = 1, -2x - 2y = 0 \Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow -1 - y = 0 \Rightarrow y = -1$$

تلميح || هناك طرق اخرى لحل السؤال كأن تضرب كل المعادلة في  $(11+2i)$  للتخلص من المقامات او ان نجعل العدد 125 بالصورة التالية  $125 = 121 + 4 = 121 - 4i^2 = (11+2i)(11-2i)$  ثم تختصر مع المقام .

علما ان السؤال بصيغته الحالية غير موجود نصا في الكتاب المدرسي

جد قيمتي  $x, y \in \mathbb{R}$  اذا علمت ان  $(x+2i)(x-i) = \frac{121+9y^2}{11+3yi}$

2016 دور 2

$$\text{sol: } (x^2 - xi + 2xi - 2i^2) = \frac{121-9y^2i^2}{11+3yi}$$

$$(x^2 + 2) + (-x + 2x)i = \frac{(11-3yi)(11+3yi)}{11+3yi}$$

$$(x^2 + 2) + (x)i = 11 - 3yi$$

$$x^2 + 2 = 11 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$x = -3y \Rightarrow x=3 \Rightarrow 3 = -3y \Rightarrow y = -1, x = -3 \Rightarrow -3 = -3y \Rightarrow y = 1$$

تأكيد || يمكن تبسيط الطرف الايمن من خلال الضرب بالعامل المرافق كما موضح ادناه

$$\frac{121+9y^2}{11+3yi} \cdot \frac{11-3yi}{11-3yi} = \frac{(121+9y^2)(11-3yi)}{(121+9y^2)} = 11 - 3yi$$

اذا كان  $x = 3+2i, y = 1-i$  اثبت ان  $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$

2006 تمهيدي

$$\text{LHS: } \overline{x+y} = \overline{(3+2i) + (1-i)} = \overline{4+i} = 4-i$$

$$\text{RHS: } \bar{x} + \bar{y} = \overline{(3+2i)} + \overline{(1-i)} = (3-2i) + (1+i) = 4-i \Rightarrow \text{LHS} = \text{RHS}$$



2014 تمهيدي

إذا كان  $C_1 = 7 - 4i$ ,  $C_2 = 2 - 3i$  فتتحقق من :  $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$ 

$$\text{LHS: } \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \overline{\left(\frac{7-4i}{2-3i}\right)} = \overline{\left(\frac{7-4i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i}\right)} = \overline{\left(\frac{14+21i-8i+12}{4+9}\right)} = \overline{\left(\frac{26+13i}{13}\right)} = \overline{2+i} = 2-i$$

$$\text{RHS: } \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} = \frac{\overline{7-4i}}{\overline{2-3i}} = \frac{7+4i}{2+3i} = \frac{7+4i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{14-21i+8i+12}{4+9} = \frac{26-13i}{13} = 2-i$$

1997 حور 1

إذا كان  $c, d \in \mathbb{R}$  وكان  $c + di = \frac{7-4i}{2+i}$  جد  $\sqrt{2c-d}i$ 

$$\text{sol: } c + di = \frac{7-4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{14-7i-8i-4}{4+1} = \frac{10-15i}{5} = 2-3i \Rightarrow c = 2, d = -3$$

$$\sqrt{2c-d}i = \sqrt{4+3}i$$

$$\sqrt{4+3}i = x + yi$$

$$4 + 3i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

$$x^2 - y^2 = 4 \dots\dots(1), 2xy = 3 \dots\dots(2), y = \frac{3}{2x} \dots\dots(3) \text{ in (1)}$$

$$x^2 - \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 4 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4\right] \cdot x^2 \Rightarrow 4x^4 - 9 = 16x^2 \Rightarrow 4x^4 - 16x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (2x^2 - 9)(2x^2 + 1) = 0$$

يهمل (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)  $2x^2 + 1 = 0$ 

$$\text{OR } 2x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \left(\frac{3}{\pm 2(\frac{3}{\sqrt{2}})}\right) \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ans: } \sqrt{4+3}i = \left\{ \pm \left( \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \right\}$$

Mob: 07902162268

9

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



د الجذران التربيعيان للعدد المركب  $3 + 4i$ 

2007 دور 1

بتربيع الطرفين  $\sqrt{3 + 4i} = x + yi$ 

$$3 + 4i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

$$x^2 - y^2 = 3 \dots\dots(1) , 2xy = 4 \dots\dots(2) , y = \frac{4}{2x} = \frac{2}{x} \dots\dots(3) \text{ in (1)}$$

$$x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{4}{x^2} = 3\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = 3x^2 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

يهمل (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)  $x^2 + 1 = 0$  either  $(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

$$\text{OR } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \left(\frac{2}{\pm 2}\right) \Rightarrow y = \pm 1$$

$$\sqrt{3 + 4i} = \{ \pm(2 + i) \}$$

جد الجذران التربيعيان للعدد المركب  $\frac{14+2i}{1+i}$ 

2009 دور 2

$$\text{sol: } \frac{14+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{14-14i+2i-2i^2}{2} = \frac{16-12i}{2} = 8 - 6i$$

بتربيع الطرفين  $\sqrt{8 - 6i} = x + yi$ 

$$8 - 6i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

$$x^2 - y^2 = 8 \dots\dots(1) , 2xy = -6 \dots\dots(2) , y = \frac{-6}{2x} = \frac{-3}{x} \dots\dots(3) \text{ in (1)}$$

$$x^2 - \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 8 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 9 = 8x^2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$$

يهمل (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)  $x^2 + 1 = 0$

$$\text{OR } x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow y = \left(\frac{-3}{\pm 3}\right) \Rightarrow y = \mp 1$$

$$\text{ans: } \sqrt{8 - 6i} = \{ \pm(3 - i) \}$$



جد الجذران التربيعيان للعدد المركب  $(-1 + 7i)(1 + i)$ 

2010 دور 2

$$\text{sol : } (-1 + 7i)(1 + i) = -1 - i + 7i + 7i^2 = -8 + 6i$$

$$\sqrt{-8 + 6i} = x + yi \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$-8 + 6i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

$$x^2 - y^2 = -8 \dots\dots(1) \quad , \quad 2xy = 6 \dots\dots(2) \quad , \quad y = \frac{6}{2x} = \frac{3}{x} \dots\dots(3) \quad \text{in (1)}$$

$$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = -8 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = -8\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 9 = -8x^2 \Rightarrow x^4 + 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x^2 + 9)(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 + 9 = 0 \quad \text{يهمل (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)}$$

$$\text{OR } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \left(\frac{3}{\pm 1}\right) \Rightarrow y = \pm 3$$

$$\text{ans : } \sqrt{-8 + 6i} = \{ \pm(1 + 3i) \}$$

جد الجذور التكعيبية للعدد 27 (( تلميح في وقتها لم تكن مبرهنة ديموافر موجودة في المنهج )

2001 دور 2

$$\text{sol : let } z = \sqrt[3]{27} \Rightarrow z^3 = 27 \Rightarrow z^3 - 27 = 0$$

$$(z - 3)(z^2 + 3z + 9) = 0$$

$$z = 3 \quad \text{OR} \quad z^2 + 3z + 9 = 0 \quad a=1, \quad b=3, \quad c=9$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2} = \frac{-3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \text{ans : } \left\{ 3, \frac{-3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i, \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

تلميح || اذا لم تحدد طريقة الحل فيمكن للطالب اختيار هذه الطريقة او طريقة ديموافر



إذا كان  $3 + i$  هو احد جذري المعادلة  $x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$  فما قيمة  $a$  وما هو الجذر الآخر .

$$(3+i)^2 - a(3+i) + (5+5i) = 0 \Rightarrow (9 + 6i + i^2) + (5 + 5i) = a \cdot (3+i)$$

$$(8 + 6i) + (5 + 5i) = a \cdot (3+i) \Rightarrow (13 + 11i) = a \cdot (3+i)$$

$$a = \frac{13+11i}{3+i} \Rightarrow a = \frac{13+11i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} \Rightarrow a = \frac{(39+11)+(-13+33)i}{10} = 5 + 2i$$

إذا كان  $h = 3 + i$  هو احد الجذرين فنفرض ان الجذر الآخر هو  $K$

$$x^2 - (5 + 2i)x + (5 + 5i) = 0$$

$$x^2 - (h + k)x + hk = 0 \Rightarrow h + K = 5 + 2i$$

$$(3 + i) + K = 5 + 2i \Rightarrow K = (5 + 2i) - (3 + i) \Rightarrow K = (5 + 2i) + (-3 - i) \Rightarrow K = 2 + i$$

نلاحظ ان اي جذر من جذور المعادلة يحقق تلك المعادلة ، ويمكن حل السؤال بالطريقة ادناه حيث يتم المقارنة بالصورة القياسية حيث ان احد الجذرين معلوما نقوم بفرض الجذر الآخر ثم نستخدم اسلوب المقارنة .

الحل بطريقة اخرى || اذا كان  $h = 3 + i$  هو احد الجذرين فنفرض ان الجذر الآخر هو  $K$

$$x^2 - a x + (5 + 5i) = 0$$

$$x^2 - (h + k)x + hk = 0$$

عند المقارنة بالصورة القياسية يتضح ان  $h + k = a$  ,  $h \cdot k = 5 + 5i$  وعليه يفضل البدء بالمعوم والانتهاه بالمجهول .

$$K(3+i) = 5+5i \Rightarrow K = \frac{5+5i}{3+i} \Rightarrow K = \frac{5+5i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} \Rightarrow K = \frac{(15+5)+(-5+15)i}{9+1} = 2 + i$$

$$K + (3 + i) = a \Rightarrow (2 + i) + (3 + i) = a \Rightarrow a = 5 + 2i$$

**تنبيه !!! لو كان السؤال بالصورة  $x^2 - (5 + 5i)x + a = 0$  بين سوف تبدأ وبين تنتهي ؟ جرب بنفسك !!**

ضع في ابسط صورة المقدار  $\frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)^2}$

2014 تمهيدي

$$\text{sol: } \frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)^2} = \frac{[(\cos \theta + i \sin \theta)^2]^5}{[(\cos \theta + i \sin \theta)^5]^2} = \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{10}}{(\cos \theta + i \sin \theta)^{10}} = 1$$



2013 دور 2

بسّط ما يأتي  $\frac{(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)^2}{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3}$ 

$$\text{sol: } \frac{(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)^2}{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3} = \frac{[(\cos \theta + i \sin \theta)^5]^2}{[(\cos \theta + i \sin \theta)^3]^3} = \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{10}}{(\cos \theta + i \sin \theta)^9} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \text{OR } & \frac{(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)^2}{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3} = \frac{(\cos 10\theta + i \sin 10\theta)}{(\cos 9\theta + i \sin 9\theta)} \\ & = (\cos 10\theta + i \sin 10\theta) \cdot (\cos 9\theta + i \sin 9\theta)^{-1} = (\cos 10\theta + i \sin 10\theta)(\cos 9\theta - i \sin 9\theta) \\ & = [\cos 10\theta \cdot \cos 9\theta + \sin 10\theta \cdot \sin 9\theta] + [\sin 10\theta \cdot \cos 9\theta - \cos 10\theta \cdot \sin 9\theta]i \\ & = \cos(10\theta - 9\theta) + i \sin(10\theta - 9\theta) = \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

2001 دور 1

ضع المقدار  $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$  بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وسعته الأساسية .

$$\text{sol: } z = \frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i} = \frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+6}{1+12} = \frac{13-13\sqrt{3}i}{13} = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ زاوية الاسناد}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{3} \text{ لان السعة تقع بالربع الرابع}$$

2002 دور 2

إذا كان  $z = (-\sqrt{3}, 1)$  عددا مركبا اكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الأساسية للسعة

$$\text{sol: } z = -\sqrt{3} + i$$

$$\text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ زاوية الاسناد}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6} \text{ لان السعة تقع بالربع الثاني}$$



إذا كان  $z = (1 + \sqrt{3}i)$  عددا مركبا اكتب الشكل الديكارتي له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

2006 دور 2

**sol :**  $z = (1, \sqrt{3})$

$$\text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ زاوية الاسناد}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ لان السعة تقع بالربع الاول}$$

إذا كان  $z = (-1 + \sqrt{3}i)$  عددا مركبا جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

2008 خارج القطر

**sol :**  $\text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ زاوية الاسناد}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ لان السعة تقع بالربع الثاني}$$

إذا كان  $z$  عددا مركبا مقياسه 3 وسعته  $\frac{\pi}{3}$  جد الشكل الديكارتي (ارجاند) والشكل الجبري له .

2003 دور 2

**sol :**  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 3 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$   
 $= \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i = \left( \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$

إذا كان  $z$  عدد مركبا مقياسه 4 وسعته  $\frac{5\pi}{6}$  جد كلا من الشكل الديكارتي والجبري له .

2006 دور 1

**sol :**  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 4 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 4 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$   
 $= -2\sqrt{3} + 2i = (-2\sqrt{3}, 2)$

جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب  $\frac{2i}{1+i}$

2007 دور 2

**sol :**  $\frac{2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2i-2i^2}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$

**sol :**  $\text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ زاوية الاسناد}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ لان السعة تقع بالربع الاول}$$



2008 دور 1

جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب  $(1 + \sqrt{3}i)^2$ 

$$\text{sol : } z = 1 + 2\sqrt{3}i + 3i^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arg(z) = \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{زاوية الاسناد هي } \frac{\pi}{3} \text{ والسعة } \theta \text{ تقع بالربع الثاني}$$

2008 دور 2

جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب  $\frac{4}{1 - \sqrt{3}i}$ 

$$\text{sol : } \frac{4}{1 - \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{4(1 + \sqrt{3}i)}{4} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ زاوية الاسناد}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ لان السعة تقع بالربع الاول}$$

2011 دور 2

جد باستخدام مبرهنة دي موافر  $(1 + i)^{11}$ 

$$\text{sol : } z = 1 + i \Rightarrow \text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{4} \text{ السعة تساوي زاوية الاسناد لان العدد المركب يقع بالربع الاول}$$

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow z^{11} = \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{11}$$

$$z^{11} = [(\sqrt{2})^{11} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{11}] = 32 \sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4} \right)$$

$$32 \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 32 \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 32 \sqrt{2} \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 32 (-1 + i) = -32 + 32i$$

Mob: 07902162268

15

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



باستخدام مبرهنة دي موافر احسب قيمة  $(1 - i)^7$

2012 دور 1

2013 تمهيدي

$$\text{let } z = 1 - i \Rightarrow \text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \text{ الربع الرابع}$$

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow z^7 = [\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)]^7 = (\sqrt{2})^7 \left( \cos \frac{49\pi}{4} + i \sin \frac{49\pi}{4} \right)$$

$$= 8\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 8\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = 8 + 8i$$

$$\frac{49\pi}{4} = \frac{49\pi}{4} - 12\pi = \frac{\pi}{4}$$

جد الجذور التكعيبية للعدد  $125i$  باستخدام مبرهنة دي موافر

2015 دور 1

sol:  $z = 125i = 125 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

$$z^{\frac{1}{3}} = [125 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)]^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore r = 125, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right); k = 0, 1, 2$$

$$\text{if } k=0 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 5 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 5 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} i$$

$$\text{if } k=1 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 5 \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) = 5 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$= 5 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} i$$

$$\text{if } k=2 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 5 \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right) = 5 \left( \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) =$$

$$= 5 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 5 (0 - i) = -5i$$

Mob: 07902162268

16

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



عبر عن العدد المركب بالصيغة القطبية  $2\sqrt{3} - 2i$ 

2012 دور 1

$$\text{sol: Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} \\ = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

2013 خارج القطر

2014 نازحين

$$\arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

زاوية الاسناد هي  $\frac{\pi}{6}$  والسعة  $\theta$  تقع بالربع الرابع

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow z = 4 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \quad \text{الصورة القطبية}$$

عبر عن العدد المركب بالصيغة القطبية  $2 - 2\sqrt{3}i$ 

2015

$$\text{sol: Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} \\ = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

زاوية الاسناد هي  $\frac{\pi}{3}$  والسعة  $\theta$  تقع بالربع الرابع

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow z = 4 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \quad \text{الصورة القطبية}$$

اكتب الصيغة القطبية للعدد المركب  $3 - 3\sqrt{3}i$ 

2015 دور 3

$$\text{sol: Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} \\ = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

تقع بالربع الرابع  $\theta$  والسعة  $\frac{\pi}{3}$  زاوية الاسناد هي

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow z = 6 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \quad \text{الصورة القطبية}$$

احسب ما يأتي  $\left[ \cos \frac{5}{24}\pi + i \sin \frac{5}{24}\pi \right]^4$ 

2012 تمهيدي

$$\text{sol: } \left[ \cos \frac{5}{24}\pi + i \sin \frac{5}{24}\pi \right]^4 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$= -\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$



اذا كان  $z_1 = 3 + 4i$  ,  $z_2 = 5 + 2i$  وضع على شكل ارجاند  $z_1 + z_2$

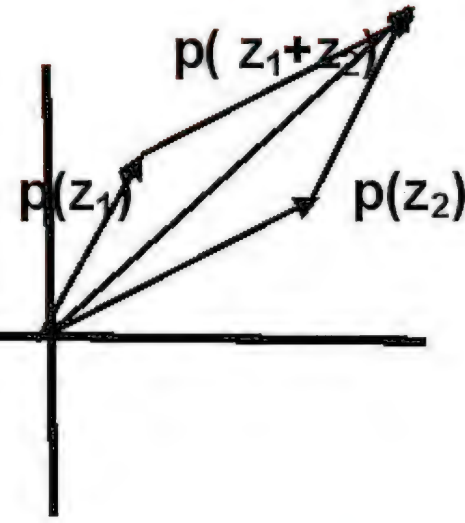
2013 دور 3

**sol:**  $z_1 = 3 + 4i \Rightarrow p(z_1) = (3, 4)$

$z_2 = 5 + 2i \Rightarrow p(z_2) = (5, 2)$

$z_1 + z_2 = z_3 = (3 + 4i) + (5 + 2i)$

$= 8 + 6i \Rightarrow p(z_1 + z_2) = (8, 6)$



حل المعادلة  $x^3 - 8i = 0$  في  $C$

2005 تمهيدي

**sol:**  $x^3 + 8i^3 = 0 \Rightarrow (x + 2i)(x^2 - 2i x + 4i^2) = 0$

$x = -2i$  OR  $x^2 - 2i x - 4 = 0$

$a=1$  ,  $b= -2i$  ,  $c= -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1}$$

$$= \frac{2i \pm \sqrt{-4+16}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2i \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pm 2\sqrt{3} + 2i}{2} = \pm \sqrt{3} + i$$

ans:  $\{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}$

حل المعادلة  $x^3 + 8i = 0$  في  $C$

2005 دور 1

**sol:**  $x^3 - 8i^3 = 0 \Rightarrow (x - 2i)(x^2 + 2i x + 4i^2) = 0$

$x = 2i$  OR  $x^2 + 2i x - 4 = 0$

$a=1$  ,  $b= 2i$  ,  $c= -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-2i) \pm \sqrt{(2i)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1}$$

$$= \frac{-2i \pm \sqrt{-4+16}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2i \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pm 2\sqrt{3} - 2i}{2} = \pm \sqrt{3} - i$$

ans:  $\{\sqrt{3} - i, -\sqrt{3} - i, 2i\}$

اذا كان  $z = -2 + 2i$  عبر عن  $z$  بالصيغة القطبية

2013 دور 1

**sol:**  $\text{Mod } z = ||z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} , \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد هي  $\frac{\pi}{4}$  والسعة  $\theta$  تقع بالربع الثاني

$$\arg(z) = \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow z = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad \text{الصورة القطبية}$$



2011 خارج القطر

## جد الجذور التربيعية للعدد المركب (8 i)

sol :  $\sqrt{8i} = x + yi$  بتربيع الطرفين

$$8i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

$$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1) \quad , \quad 2xy = 8 \dots\dots(2) \quad , \quad y = \frac{8}{2x} = \frac{4}{x} \dots\dots(3) \quad \text{in (1)}$$

$$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

يهمل (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)  $x^2 + 4 = 0$ 

$$\text{OR } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \left(\frac{4}{\pm 2}\right) \Rightarrow y = \pm 2$$

$$\text{ans : } \{ \pm (2 + 2i) \}$$

ملاحظة || يمكن حل هذا السؤال باستخدام مبرهنة دي موافر  $(8i)^{\frac{1}{2}}$ 

$$\text{sol : } z = 8i = 8 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) ; k = 0, 1$$

$$\text{if } k = 0 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2 + 2i$$

$$\text{if } k = 1 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -2 - 2i$$

## جد الجذور التربيعية للعدد المركب (-8 i)

2013 تمهيدي

sol :  $\sqrt{-8i} = x + yi$  بتربيع الطرفين

$$-8i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

$$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1) \quad , \quad 2xy = -8 \dots\dots(2) \quad , \quad y = \frac{-8}{2x} = \frac{-4}{x} \dots\dots(3) \quad \text{in (1)}$$

$$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

يهمل (مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)  $x^2 + 4 = 0$ 

$$\text{OR } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \mp 2$$

$$\text{ans : } \{ \pm (2 - 2i) \}$$

ملاحظة || يمكن حل هذا السؤال باستخدام مبرهنة دي موافر  $(8i)^{\frac{1}{2}}$ 

$$\text{sol : } z = -8i = 8 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} \left( \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) ; k = 0, 1$$

$$\text{if } k = 0 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -2 + 2i$$

$$\text{if } k = 1 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2 - 2i$$

Mob: 07902162268



باستخدام مبرهنة دي موافر جد الجذور التكعيبية للعدد المركب (8i)

نارحين 2015 دور 1

2016 دور 1

**sol :**  $z = 8i = 8 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

$$z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) ; k = 0, 1, 2$$

if  $k = 0 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \sqrt{3} + i$

if  $k = 1 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = -\sqrt{3} + i$

if  $k = 2 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2 \left( \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 2(0 - i) = -2i$

د مجموعة حل المعادلة في مجموعة الاعداد المركبة باستخدام مبرهنة دي موافر :  $x^3 - 8i = 0$

2015 4

**sol :**  $x^3 = 8i = 8 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

$x = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) ; k = 0, 1, 2$  ثم نكمل بنفس الاسلوب السابق

جد ببسط صورة

خارج 2015 دور 1

a)  $\left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)^{-3} = \left( \cos \frac{21\pi}{12} - i \sin \frac{21\pi}{12} \right) = \left( \cos \frac{7\pi}{4} - i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

b)  $(\cos \theta + i \sin \theta)^8 \cdot (\cos \theta - i \sin \theta)^4$

**sol :**  $(\cos \theta + i \sin \theta)^8 \cdot (\cos \theta - i \sin \theta)^4 = (\cos \theta + i \sin \theta)^8 \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)^{-4}$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$$

OR  $(\cos \theta + i \sin \theta)^8 \cdot (\cos \theta - i \sin \theta)^4$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta)^4 \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)^4 \cdot (\cos \theta - i \sin \theta)^4$$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta)^4 [(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)]^4$$

$$= (\cos 4\theta + i \sin 4\theta)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^4 = (\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$



2016 دور 1 فى

اكتب العدد  $Z = (1 + \sqrt{3} i)^2$  بالصيغة القطبية

الطريقة الاولى ||

$$\text{sol: } C = 1 + \sqrt{3} i \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

لان السعة تقع بالربع الاول

$$C = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$Z = C^2 = 2^2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^2 = 4 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$Z = (1 + \sqrt{3} i)^2 = 1 + 2\sqrt{3} i + 3i^2 = -2 + 2\sqrt{3} i$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

الطريقة الثانية ||

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

لان السعة تقع بالربع الثانى زاوية الاسناد تساوى

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow Z = 4 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

تقييم || على الرغم من ان السؤال غير موجود نصا في الكتاب المنهجي الا ان فكرته منهجية وطريقتي الحل مقبولة وزاريا بصيغتها الحالية وتكون الصيغة الاولى ملزمة للطالب اذا كان المطلوب في السؤال باستخدام مبرهنة ديموافر جد بالصيغة القطبية واذا كانت صيغة السؤال باستخدام مبرهنة ديموافر جد قيمة  $(1 + \sqrt{3} i)^2$  قيمة  $4 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$  من دون ذكر عبارة الصيغة القطبية فيجب تحويل الناتج النهائي الى الصيغة الجبرية كما في ادناه  $(-2 + 2\sqrt{3} i)$



2014 دور 1

جد الصيغة القطبية للجذور الخمسة للعدد المركب  $(\sqrt{3} + i)^2$ 

**sol:**  $z = \sqrt{3} + i \Rightarrow \text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

لان السعة تقع بالربع الاول  $\theta = \frac{\pi}{6}$   $\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  $\sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$z = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$$

$$z^{\frac{2}{5}} = (z^2)^{\frac{1}{5}} = [2^2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})^2]^{\frac{1}{5}} = [4(\cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6})]^{\frac{1}{5}}$$

$$= [4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})]^{\frac{1}{5}}$$

$$z^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{1}{5}} (\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5}) ; k = 0, 1, 2, 3, 4$$

if  $k=0 \Rightarrow z^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{1}{5}} (\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}) = \sqrt[5]{4}(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})$

if  $k=1 \Rightarrow z^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{1}{5}} (\cos \frac{\pi+2\pi}{5} + i \sin \frac{\pi+2\pi}{5}) = \sqrt[5]{4}(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5})$

if  $k=2 \Rightarrow z^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{1}{5}} (\cos \frac{\pi+4\pi}{5} + i \sin \frac{\pi+4\pi}{5}) = \sqrt[5]{4}(\cos \frac{13\pi}{5} + i \sin \frac{13\pi}{5})$

if  $k=3 \Rightarrow z^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{1}{5}} (\cos \frac{\pi+6\pi}{5} + i \sin \frac{\pi+6\pi}{5}) = \sqrt[5]{4}(\cos \frac{19\pi}{5} + i \sin \frac{19\pi}{5})$

if  $k=4 \Rightarrow z^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{1}{5}} (\cos \frac{\pi+8\pi}{5} + i \sin \frac{\pi+8\pi}{5}) = \sqrt[5]{4}(\cos \frac{25\pi}{5} + i \sin \frac{25\pi}{5})$

$$= \sqrt[5]{4}(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$$



2014 دور 2

باستخدام مبرهنة دي موافر جد  $(\sqrt{3} + i)^{-9}$ 

**sol :** let :  $z = \sqrt{3} + i \Rightarrow \text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  $\sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$  لأن السعة تقع بالربع الاول 2012 خارج القطر

$$z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z^{-9} = [2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)]^{-9} = (2)^{-9} \left( \cos \frac{9\pi}{6} - i \sin \frac{9\pi}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{512} \left( \cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{1}{512} (0 + i) = \frac{1}{512} i$$

جد الصيغة القطبية للعدد المركب  $5 - 5i$ 

2014 دور 3

**sol :**  $\text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$

$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ,  $\sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$  الربع الرابع

$$z = 5\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

باستخدام مبرهنة دي موافر جد الجذور التربيعية للعدد المركب  $-1 + \sqrt{3}i$ 

2014 خارج القطر

**sol :**  $z = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow \text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{-1}{2}$  ,  $\sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$  لأن السعة تقع بالربع الثاني

$$z = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = [2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)]^{\frac{1}{2}}$$

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2} \right) ; k = 0, 1$$

if  $k = 0 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} i$

if  $k = 1 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} i$



إذا كان  $2-4i$  هو احد جذري المعادلة  $2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$  ،

معاملاتها حقيقية ، جد قيمتي  $b, c \in \mathbb{R}$

الحل || بما ان المعاملات حقيقية فان الجذران مترافقان

2015 دور 2

$$h = 2 - 4i , k = 2 + 4i$$

$$h+k = (2 - 4i) + (2 + 4i) = 4 , h.k = (2 - 4i) (2 + 4i) = 4 + 16 = 20$$

$$x^2 - (h + k)x + hk = 0$$

$$x^2 - 4x + 20 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 40 = 0 , 2x^2 - (1 + b)x + (c - 6) = 0$$

$$1 + b = 8 \Rightarrow b = 7 , c - 6 = 40 \Rightarrow c = 46$$



قصي هاشم التميمي

Mob: 07902162268

24

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



2015 دور 2 خارج

جد الجذور التكعيبية للعدد المركب  $(1 + i)^2$  على وفق مبرهنة دي موافر .

sol: الطريقة الاولى

$$z = 1 + i \Rightarrow \text{Mod } z = ||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{||z||} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{||z||} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{4} \text{ السعة تساوي زاوية الاسناد لان العدد المركب يقع بالربع الاول}$$

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow z^2 = \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^2$$

$$z^2 = \left[ (\sqrt{2})^2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^2 \right] = 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(z^2)^{\frac{1}{3}} = \left[ 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \right]^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) ; k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \Rightarrow (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \sqrt[3]{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$$

$$k = 1 \Rightarrow (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$= \sqrt[3]{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$$

$$k = 2 \Rightarrow (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right)$$

$$= \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \sqrt[3]{2} (0 - i)$$



## الطريقة الثانية

$$z = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(z)^{\frac{1}{3}} = \left[ 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \right]^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) ; k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \Rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \sqrt[3]{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$$

$$k = 1 \Rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$= \sqrt[3]{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$$

$$k = 2 \Rightarrow (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right)$$

$$= \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \sqrt[3]{2} (0 - i)$$

تلميح || لو كانت صيغة السؤال (( باستخدام مبرهنة دي موافر جد  $(1 + i)^2$  ثم جد الجذور الثلاثة له كانت الطريقة الاولى هي الطريقة الاكثر قبولا اما السؤال في صيغته الحالية فتكون الطريقتين مقبولة .



2016 دور 2 خارج

هل ان :  $\frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)^2} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = 0$  اثبت ذلك .

$$\begin{aligned} \text{sol : } \frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)^2} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2 &= \frac{[(\cos \theta + i \sin \theta)^2]^5}{[(\cos \theta + i \sin \theta)^4]^2} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{10}}{(\cos \theta + i \sin \theta)^8} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 - (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = 0 \end{aligned}$$

التقييم \ السؤال منهجي جدا رغم عدم وجوده بهذا النص في الكتاب المقرر الا ان فكرته سهلة نسبيا وبما ان هل الاستفهامية يتحقق الجواب فيها بـ ( نعم او كلا ) فان ورود كلمة اثبت ذلك في نهاية السؤال تشير الى وجوب اثبات التحقق من عدمه اما اذا وردت كلمة اثبت في بداية السؤال فانها تدل على وجوب تحققها .



### حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الثاني ( القطوع المخروطية )

قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين  $(1, -2\sqrt{5})$  ,  $(1, 2\sqrt{5})$  جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل .

**الحل :-** في القطع المكافئ بما انه مار بنقطتين تقعان بالربعين الاول والرابع فان بؤرتيه تقع على الاحداثي السيني الموجب وكلتا النقطتين تحقق معادلته أي ان معادلته  $y^2 = 4Px$

$$\text{معادلة القطع المكافئ } y^2 = 20x \Rightarrow \text{بؤرة القطع المكافئ } (5, 0) , 20 = 4P \Rightarrow P = 5$$

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3 , c = 5 \Rightarrow \text{بؤرتي القطع الزائد } (5, 0) , (-5, 0)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

$$\text{معادلة القطع الزائد } 1 = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$$

1997 دور 1  
2014 دور 1  
2013 دور 2  
2016 دور 1 في

قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته  $hx^2 - ky^2 = 90$  وطول محوره الحقيقي  $(6\sqrt{2})$  حدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته  $9x^2 + 16y^2 = 576$  جد قيمتي كل من  $h, k$  الحقيقيتين .

$$\text{في القطع الناقص } 1 = \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} \Rightarrow [9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576$$

$$a^2 = 64 , b^2 = 36 , a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = 36 + c^2 \Rightarrow c^2 = 28 \Rightarrow c = \sqrt{28}$$

$$\text{بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد } (\sqrt{28}, 0), (-\sqrt{28}, 0)$$

$$\text{في القطع الزائد } 2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} , c = \sqrt{28}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 28 = 18 + b^2 \Rightarrow b^2 = 10$$

$$\text{في القطع الزائد } 1 = \frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} \Rightarrow [hx^2 - ky^2 = 90] \div 90$$

$$a^2 = \frac{90}{h} \Rightarrow 18 = \frac{90}{h} \Rightarrow h = 5 , b^2 = \frac{90}{k} \Rightarrow 10 = \frac{90}{k} \Rightarrow k = 9$$

1998 دور 1  
2012 دور 2  
2015 دور 2



قطع ناقص معادلته  $hx^2 + ky^2 = 36$  مركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طوليه محوريه يساوي  
(60) واحدتي بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته  $y^2 = 4\sqrt{3}x$  ما قيمة كل من  $h, k \in \mathbb{R}$

1998 دور 2

الحل :- في القطع المكافئ  $y^2 = 4\sqrt{3}x$  ,  $y^2 = 4Px \Rightarrow 4P = 4\sqrt{3} \Rightarrow P = \sqrt{3}$

$c = \sqrt{3} \Rightarrow$  بؤرتي القطع الناقص  $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

$$(2a)^2 + (2b)^2 = 60 \Rightarrow [4a^2 + 4b^2 = 60] \div 4$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow a^2 = 15 - b^2 \dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \dots (2) \Rightarrow 15 - b^2 = b^2 + 3 \Rightarrow 2b^2 = 12 \Rightarrow b^2 = 6$$

$$a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$[hx^2 + ky^2 = 36] \div 36 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{36}{h} \Rightarrow 9 = \frac{36}{h} \Rightarrow h = 4, b^2 = \frac{36}{k} \Rightarrow 6 = \frac{36}{k} \Rightarrow k = 6$$

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$  واحد رأسيه بؤرة

1997 دور 2

القطع المكافئ  $y^2 + 8x = 0$

الحل || في القطع الناقص  $a^2 = 36, b^2 = 20, c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 20 = 16 \Rightarrow c = 4$

$c = 4 \in x\text{-axis} \Rightarrow$  بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد  $(\pm 4, 0)$

$$y^2 + 8x = 0 \Rightarrow y^2 = -8x, y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow p = 2$$

في القطع الزائد  $a = 2 \Rightarrow$  بؤرة القطع المكافئ وهي احد رأسي القطع الزائد  $(-2, 0)$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$
 معادلة القطع الزائد



النقطة ( 6 , L ) تنتمى الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته  $x^2 - 3y^2 = 1$  جد كلا من قيمة L ثم جد طولي نصفي قطري البورتين المرسومين من تلك النقطة .

1999 دور 1

2010 تمهيدي

sol : أي نقطة تنتمى الى منحنى فانها تحقق معادلته

$$36 - 3L^2 = 12 \Rightarrow 3L^2 = 24 \Rightarrow L^2 = 8 \Rightarrow L = \pm \sqrt{8}$$

القطع الزائد  $P_1(6, \sqrt{8})$  ,  $P_2(6, -\sqrt{8}) \in$

$$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 12, b^2 = 4, c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$P_1 F_1$  هو طول النصف القطر البؤري من الجهة اليمنى  $\Rightarrow$  البؤرة اليمنى للقطع الزائد  $F_1(4, 0)$

$P_1 F_2$  هو طول النصف القطر البؤري من الجهة اليسرى  $\Rightarrow$  البؤرة اليسرى للقطع الزائد  $F_2(-4, 0)$

$$P_1 F_1 = \sqrt{(6-4)^2 + (\sqrt{8}-0)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ وحدة طول}$$

$$P_1 F_2 = \sqrt{(6+4)^2 + (\sqrt{8}-0)^2} = \sqrt{100+8} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ وحدة طول}$$

النقطة  $(\frac{1}{3}, 2)$  تنتمى الى القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمى الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و النسبة بين طولي محوريه  $\frac{5}{4}$  جد معادلة كل من القطعين المكافئ والناقص .

1999 دور 2

sol :  $\because (\frac{1}{3}, 2) \in \text{Parabola} \Rightarrow$  تحقق معادلته

$$y^2 = 4Px \Rightarrow 4 = 4P(\frac{1}{3}) \Rightarrow 12 = 4P \Rightarrow P = 3 \Rightarrow (3, 0) \text{ بؤرة القطع المكافئ}$$

$$y^2 = 12x \Rightarrow c = 3 \Rightarrow \text{بؤرتي القطع الناقص } (3, 0), (-3, 0) \Rightarrow \text{معادلة القطع المكافئ}$$

$$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4a = 5b \Rightarrow a = \frac{5b}{4} \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \dots\dots\dots (2) \Rightarrow (\frac{5b}{4})^2 = b^2 + 9 \Rightarrow [\frac{25b^2}{16} = b^2 + 9] \cdot 16$$

$$25b^2 = 16b^2 + 144 \Rightarrow 9b^2 = 144 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = \frac{5}{4} \cdot 4 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ معادلة القطع الناقص}$$

(( انتبه .... )) في السؤال السابق اذا كان النسبة بين طولي محوريه  $\frac{4}{5}$  فيكون  $\frac{2b}{2a} = \frac{4}{5}$  .

Mob: 07902162268

30

اعدادية الكاظمية للبنين



جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته  $y^2 + 8x = 0$  علما ان القطع الناقص يمر بالنقطة  $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ .

2000 دور 1

2014 دور 2

**الحل :-** في القطع المكافئ  $y^2 + 8x = 0 \Rightarrow y^2 = -8x$  ,  $y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 8 \Rightarrow P = 2$

بؤرة القطع المكافئ هي  $(-2, 0)$  أي ان بؤرتي القطع الناقص هي  $(2, 0)$  ,  $(-2, 0)$  أي ان  $c = 2$

المعادلة القياسية للقطع الناقص هي  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$[ \frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 ] \cdot a^2 b^2 \Rightarrow 12b^2 + 3a^2 = a^2 b^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 4 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$12b^2 + 3(b^2 + 4) = (b^2 + 4)b^2 \Rightarrow 12b^2 + 3b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$$

$$b^4 + 4b^2 - 12b^2 - 3b^2 - 12 = 0 \Rightarrow b^4 - 11b^2 - 12 = 0$$

$$(b^2 - 12)(b^2 + 1) = 0 \Rightarrow b^2 + 1 \neq 0 , b^2 - 12 = 0 \Rightarrow b^2 = 12$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 12 + 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته  $x^2 - 3y^2 = 12$  والنسبة بين طولي محوريه كنسبة  $\frac{5}{3}$

2000 دور 2

2013 دور 3

2007 تمهيدي

2008 دور 2 خارج

2014 دور 4 انبار

2015 دور 1 خارجين

في القطع الزائد  $[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$$\Rightarrow a^2 = 12 , b^2 = 4 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

القطع الناقص  $c = 4 \Rightarrow$  بؤرتي القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص  $(4, 0)$  ,  $(-4, 0)$

$$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3a = 5b \Rightarrow a = \frac{5b}{3} \quad \dots\dots\dots (1) , a^2 = b^2 + c^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$[ \frac{25b^2}{9} = b^2 + 16 ] \cdot 9 \Rightarrow 25b^2 = 9b^2 + 144 \Rightarrow 16b^2 = 144 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$a = \frac{5}{3} \cdot 3 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$



2001 دور 1

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص  $3x^2 + 5y^2 = 120$  والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة  $\frac{1}{2}$

**Sol :**  $3x^2 + 5y^2 = 120 \Rightarrow \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$

$a^2 = 40$  ,  $b^2 = 24 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 40 = 24 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

في ق . ز  $c = 4 \in x - \text{axis} \Rightarrow$  بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد  $(\pm 4, 0)$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c = 4a \Rightarrow c = 2a \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow a = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 12$

معادلة القطع الزائد  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

2001 دور 2

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين  $y^2 = 20x$  ,  $y^2 = -20x$  والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي 2 وحدة .

**sol :**  $y^2 = 20x$  ,  $y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 20 \Rightarrow p = 5$

$y^2 = -20x$  ,  $y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 20 \Rightarrow p = 5$

في القطع الزائد  $c = 5 \Rightarrow$  بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الزائد  $(\pm 5, 0)$

either  $2a - 2b = 2 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1 \dots (1)$

$c^2 = a^2 + b^2 \dots (2)$

$25 = (b + 1)^2 + b^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 2b + 1 + b^2 \Rightarrow 2b^2 + 2b - 24 = 0$

$b^2 + b - 12 = 0 \Rightarrow (b+4)(b-3) = 0 \Rightarrow b = 3$  ,  $a = 3 + 1 = 4$

معادلة القطع الزائد  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

or  $2b - 2a = 2 \Rightarrow b - a = 1 \Rightarrow b = a + 1 \dots (1)$

$c^2 = a^2 + b^2 \dots (2)$

$25 = (a + 1)^2 + a^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 2a + 1 + a^2 \Rightarrow 2a^2 + 2a - 24 = 0$

$a^2 + a - 12 = 0 \Rightarrow (a+4)(a-3) = 0 \Rightarrow a = 3$  ,  $b = 3 + 1 = 4$

معادلة القطع الزائد  $\frac{x}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

تأكيد || حرف (و) في اللغة العربية لايفيد الترتيب ففي القطع الزائد يمكن ان يكون المحور الحقيقي اكبر من المحور التخيلي او بالعكس لذا فان الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والتخيلي او الفرق بين طولي محوريه التخيلي والحقيقي لها نفس المعنى وهو الاحتمالان معا الا اذا ارتبط بقرينة كأن يقال ان المحور الحقيقي يزيد على المحور التخيلي بمقدار 4 او يقال ينقص عنه عندها يجب الالتزام بالترتيب .

Mob: 07902162268

32

اعدادية الكاظمية للبنين



2002 دور 1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي 8 وحدات ومجموع طولي محوريه يساوي 16 وحدة .

**sol:**  $2c = 8 \Rightarrow c = 4 \in x\text{-axis}$

$2a + 2b = 16 \Rightarrow a + b = 8 \Rightarrow a = 8 - b \dots(1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \dots(2)$

$(8 - b)^2 = b^2 + 16 \Rightarrow 64 - 16b + b^2 = b^2 + 16 \Rightarrow 16b = 48 \Rightarrow b = 3$

$a = 8 - 3 = 5$

معادلة القطع الناقص  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

2002 دور 2

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص  $x^2 + 9y^2 = 36$  والنسبة بين غولي محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي  $\frac{1}{2}$  وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين .

**sol :**  $[x^2 + 9y^2 = 36] \div 36 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$

في القطع الزائد  $c = 6 \in x\text{-axis}$  رأسا القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد  $(\pm 6, 0)$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2a \Rightarrow 6 = 2a \Rightarrow a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 27$

معادلة القطع الزائد  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

2003 دور 1

قطع ناقص معادلته  $x^2 + 4y^2 = 4$  جد طول محوريه واحداثيي رأسيه وبؤرتيه .

**sol :**  $[x^2 + 4y^2 = 4] \div 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$  ,  $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$  ,  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4 = 1 + c^2$

$c^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

طول المحور الصغير  $2b = 2$  , طول المحور الكبير  $2a = 4$

بؤرتي القطع الناقص  $(\pm\sqrt{3}, 0)$  , رأسا القطع الناقص  $(\pm 2, 0)$



جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$  والنسبة بين البعد بين  
بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة  $\frac{5}{4}$ .

2003 دور 2

2009 دور 2

**sol :** في القطع الناقص  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$

$$a^2 = 49, b^2 = 24 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 49 = 24 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

في القطع الزائد  $a = 5 \Rightarrow$  بؤرتي القطع الناقص والتي تنتمي الى القطع الزائد  $(\pm 5, 0)$

$$\frac{2c}{2b} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4c = 5b \Rightarrow c = \frac{5b}{4} \dots (1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \dots (2) \Rightarrow \left[ \frac{25b^2}{16} = 25 + b^2 \right] \cdot 16$$

$$25b^2 = 400 + 16b^2 \Rightarrow 9b^2 = 400 \Rightarrow b^2 = \frac{400}{9}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\frac{400}{9}} = 1$$
 معادلة القطع الزائد

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ  $x^2 = 24y$   
والفرق بين طولي محوريه يساوي 4 وحدات طول.

2004 دور 1

2015 دور 2

**sol :**  $x^2 = 24y, x^2 = 4py \Rightarrow 4p = 24 \Rightarrow p = 6$

$\Rightarrow c = 6 \in y\text{-axis}$  بؤرتي القطع الناقص  $(0, \pm 6)$  بؤرة القطع المكافئ  $(0, 6)$

$$2a - 2b = 4 \Rightarrow a - b = 2 \Rightarrow a = 2 + b \dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \dots (2) \Rightarrow (2 + b)^2 = b^2 + 36 \Rightarrow 4 + 4b + b^2 = b^2 + 36$$

$$4b = 32 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 10$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$$
 معادلة القطع الناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين  
بؤرتيه تساوي 12 وحدة والفرق بين طولي محوريه يساوي 4 وحدات طول.

2006 تمهيدي

**sol :**  $2c = 12 \Rightarrow c = 6 \in x\text{-axis}$

$$2a - 2b = 4 \Rightarrow a - b = 2 \Rightarrow a = 2 + b \dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \dots (2) \Rightarrow (2 + b)^2 = b^2 + 36 \Rightarrow 4 + 4b + b^2 = b^2 + 36$$

$$4b = 32 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 10$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$
 معادلة القطع الناقص



قطعان زائد وناقص احدهما يمر ببؤرتي الآخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  علما ان محوريهما على المحورين الاحداثيين .  
تلميح || كلمة ( احدهما ) الواردة في السؤال حصل عليها اعتراض لغوي ويمكن استبدالها بكلمة ( كل منهما )  
الحل :- نلاحظ ان بؤرتي القطع الناقص هما راسي القطع الزائد وراسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد

2004 دور 2  
2005 تمميدي  
2006 دور 2  
2008 دور 2  
2014 دور 3

$$\text{في القطع الناقص } 1 = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \Rightarrow [9x^2 + 25y^2 = 225] \div 225$$

$$\Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5, b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$$

بؤرتي القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد  $(4, 0), (-4, 0)$   
رأسي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد  $(5, 0), (-5, 0)$   
في القطع الزائد  $c = 5, a = 4$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ معادلة القطع الزائد}$$

جد معادلة القطع المخروطي الذي محوره هما المحورين الاحداثيين واحد بؤرتيه  $(-5, 0)$  واحد رأسيه  $(3, 0)$

2004 دور 1

$$\text{sol: } (-5, 0) = (-c, 0) \Rightarrow c = 5, (3, 0) = (a, 0) \Rightarrow a = 3$$

$$\because c > a \Rightarrow \text{فإن القطع المخروطي هو قطع زائد} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{ معادلة القطع الزائد}$$

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومحوره محور السينات ويمر بالنقطة  $(1, 4)$  ثم جد معادلة المماس له عند تلك النقطة .

2004 دور 2

الحل | بما ان النقطة تقع في الربع الاول وبؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات فان معادلته

$$y^2 = 4px \Rightarrow 16 = 4p \Rightarrow p = 4 \Rightarrow y^2 = 16x \text{ معادلة القطع المكافئ}$$

$$2yy' = 16 \Rightarrow y' = \frac{8}{y} \Rightarrow m = \frac{8}{4} = 2 \text{ ميل المماس للمنحني}$$

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \Rightarrow (y - 4) = 2(x - 1) \text{ معادلة المماس}$$



بأستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذى رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله  $y=\sqrt{3}$   
 بما ان معادلة الدليل  $y=\sqrt{3}$  فان بؤرتاه  $F(0, -\sqrt{3})$  و  $Q(x, \sqrt{3})$

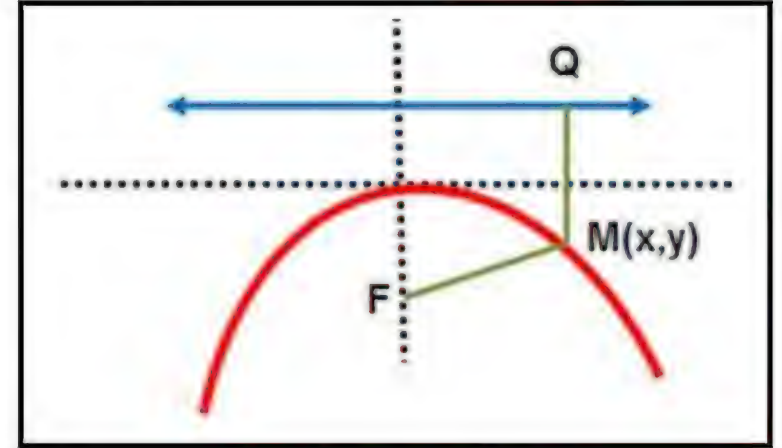
2005 تمهيدي

$$\overline{QM} = \overline{FM}$$

$$\sqrt{(x-x)^2 + (y-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x)^2 + (y+\sqrt{3})^2}$$

$$y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3$$

$$x^2 = -4\sqrt{3}y$$



جد معادلة القطع الناقص الذى مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي 6 وحدات والفرق بين طولي محوريه وحدتا طول .

2005 دور 1

$$\text{sol : } 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \in x - \text{axis}$$

$$2a - 2b = 2 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \dots (2) \Rightarrow (1 + b)^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 1 + 2b + b^2 = b^2 + 9$$

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

جد معادلة القطع الزائد الذى بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين  $y^2 = 20x$  ,  $y^2 = -20x$  وطول محوره المرافق 8 وحدات .

2005 دور 1

$$\text{sol : } y^2 = 20x, y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 20 \Rightarrow p = 5$$

$$y^2 = -20x, y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 20 \Rightarrow p = 5$$

بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الزائد  $(5,0)$  ,  $(-5,0)$

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 16 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{معادلة القطع الزائد}$$

2008 دور 1

2015 دور 4 مراجعة



2005 دور 2

عين النقط على القطع الزائد الذى معادلته  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$  والتي تبعد عن البؤرة فى الفرع الايمن بمقدار  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  وحدة .

**sol :**  $a^2 = 3$  ,  $b^2 = 1$  ,  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3 + 1 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$

$F_1(2, 0)$  البؤرة اليمنى للقطع الزائد , let  $P(x, y) \in$  للقطع الزائد  $\Rightarrow PF_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow [x^2 - 4x + 4 + y^2 = \frac{1}{3}] \cdot 3$

$3x^2 - 12x + 12 + 3y^2 = 1 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 11 + 3y^2 = 0 \dots\dots\dots(1)$

$[\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1] \cdot 3 \Rightarrow x^2 - 3y^2 = 3 \Rightarrow 3y^2 = x^2 - 3 \dots\dots\dots(2)$  نعوض 2 فى 1

$3x^2 - 12x + 11 + x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

اما  $x = 1 \Rightarrow 3y^2 = 1 - 3 \Rightarrow 3y^2 = -2$  يهمل

او  $x = 2 \Rightarrow 3y^2 = 4 - 3 \Rightarrow 3y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore (2, \frac{1}{\sqrt{3}}), (2, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \in$  القطع الزائد

2005 دور 2

لتكن  $y^2 - 12x = 0$  ,  $y^2 + 12x = 0$  معادلتى قطعين مكافئين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع الناقص الذى بؤرتاه هما بؤرتى القطعين المكافئين وطول محوره الصغير يساوي 10 وحدات طول .

**sol :**  $y^2 = 12x$  ,  $y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3$

$y^2 = -12x$  ,  $y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3$

معادلة دليليهما  $x = 3$  ,  $x = -3$  , بؤرتى القطعين المكافئين وهما بؤرتى القطع الناقص  $(3,0)$  ,  $(-3,0)$

$2b = 10 \Rightarrow b = 5$

$a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 25 \Rightarrow a^2 = 34$

معادلة القطع الناقص  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$

Mob: 07902162268

37

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



تكن  $16x^2 - 9y^2 = 144$  ، جد البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقى والمرافق.

2006 تمهيدي

2014 نازحين

$$\text{sol : } [16x^2 - 9y^2 = 144] \div 144 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 , b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5$$

$$\text{البؤرتان } F_1(c, 0), F_2(-c, 0) = (5, 0), (-5, 0)$$

$$\text{الرأسان } V_1(a, 0), V_2(-a, 0) = (3, 0), (-3, 0)$$

$$\text{طول المحور الحقيقى } 2a = 6 , \text{ طول المحور التخيلى } 2b = 8$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \text{ الإختلاف المركزى}$$

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين  $(3, 6)$  ,  $(-3, 6)$  ثم جد معادلة دليله .

2006 دور 1

الحل | بما ان النقطتان تقعان بالربعين الاول والثاني في بؤرة القطع المكافئ تقع على المحور الصادي الموجب

$$\text{معادلة الليل } y = -\frac{3}{8} , \text{ البؤرة } f(0, \frac{3}{8}) \Rightarrow p = \frac{3}{8} \Rightarrow 9 = 24p \Rightarrow x^2 = 4py$$

$$\Rightarrow x^2 = 4(\frac{3}{8})y \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}y \text{ معادلة القطع المكافئ}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد  $8y^2 - x^2 = 32$  ويمس دليل القطع المكافئ  $y^2 + 16x = 0$  .

2006 دور 1

2016 دور 2

$$\text{sol : } [8y^2 - x^2 = 32] \div 32 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1 \Rightarrow a^2 = 4 , b^2 = 32$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 32 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$$

$$\text{بؤرتا القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص } (0, 6), (0, -6)$$

$$y^2 + 16x = 0 \Rightarrow y^2 = -16x , y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 16 \Rightarrow P = 4$$

$$\text{هي نقطة التماس مع القطع الناقص } (4, 0) \Rightarrow \text{معادلة الدليل } x = 4$$

$$\text{في القطع الناقص لان البؤرتاه تقعان على محور الصادات } b = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 36 \Rightarrow a^2 = 52$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{52} + \frac{x^2}{16} = 1 \text{ معادلة القطع الناقص}$$



جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين (1, 3) , (-3, 1) ثم جد معادلة دليله .

2006 دور 2

الحل | بما ان القطع المكافئ يمر بنقطتين تقعان في الربعين الاول والرابع فان بؤرته تقع على محور السينات الموجب

$$y^2 = 4px \Rightarrow 9 = 4p \Rightarrow p = \frac{9}{4} \Rightarrow y^2 = 9x$$

$$F(p, 0) = (\frac{9}{4}, 0) \text{ البؤرة , } x = -p \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$$

جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم  $2x - y = 8$  مع محور السينات وطول محوره التخيلي 4 وحدات .

2007 تمهيدي

الحل | أي نقطة تقع على محور السينات يكون فيها  $y = 0$

$$y = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 0) \text{ احدى بؤرتي القطع الزائد } c = 4$$

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2, c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = a^2 + 4 \Rightarrow a^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ معادلة القطع الزائد}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبعد بين بؤرتيه 8 وحدات ورأساه هما

2007 دور 1

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ بؤرتا القطع الزائد}$$

$$\text{sol : } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ في القطع الزائد } \Rightarrow a^2 = 16, b^2 = 9, c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

في القطع الناقص  $a = 5 \Rightarrow$  بؤرتي القطع الزائد وهما رأسي القطع الناقص  $(\pm 5, 0)$

$$2c = 8 \Rightarrow c = 4, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ معادلة القطع الناقص}$$

لتكن  $x^2 - ky^2 = 3$  تمثل معادلة قطع زائد احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ  $y^2 + 8x = 0$  جد قيمة k

2007 دور 1

$$\text{sol : } y^2 + 8x = 0 \Rightarrow y^2 = -8x, y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 8 \Rightarrow P = 2$$

$$c = 2 \Rightarrow \text{بؤرتي القطع الزائد } (2, 0), (-2, 0) \Rightarrow \text{بؤرة القطع المكافئ } (-2, 0)$$

$$[x^2 - ky^2 = 3] \div 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{k}} = 1 \text{ في القطع الزائد } \Rightarrow a^2 = 3, b^2 = \frac{3}{k}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow [4 = 3 + \frac{3}{k}] \Rightarrow \frac{3}{k} = 1 \Rightarrow k = 3$$



جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته نقطة الانقلاب للدالة  $f(x)=(x-1)^3$

2007 خارج القطر

**sol :**  $f(x) = (x-1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x-1)^2 \Rightarrow f''(x) = 6(x-1)$

نقطة الانقلاب وهي بؤرة القطع المكافئ  $(1, 0) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 6(x-1) = 0$

معادلة القطع المكافئ  $y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4x \Rightarrow p = 1$

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$  وطول محوره الحقيقي (12) وحدة وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين .

2007 خارج القطر

**sol :**  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

هما رأسا القطع الناقص وهما بؤرتا القطع الزائد  $(10, 0), (-10, 0)$

في القطع الزائد  $2a = 12 \Rightarrow a = 6, c = 10$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 100 = 36 + b^2 \Rightarrow b^2 = 64$

معادلة القطع الزائد  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$  والمار ببؤرتي

2015 خارج القطر محور 1

القطع الناقص نفسه ثم جد مساحة القطع الناقص

تلميح || هذه السؤال يعتبر مرادف للعبارة ( كل منهما يمر ببؤرة الآخر ) اي ان بؤرتي القطع الناقص هما رأسي القطع الزائد ورأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد ويشترك مع السؤال الوزاري اعلاه بالمقطع الثاني من هذا التفسير اما المقطع الاول فنقوم بحساب بؤرتي القطع الناقص عن طريق العلاقة  $a^2 = b^2 + c^2$  والتي هي نفسها رأسي القطع الزائد وستكون الاجابة النهائية هي ذاتها في السؤال الوزاري اعلاه رغم تغير نمط السؤال ، ويضاف الى الحل حساب مساحة القطع الناقص  $A = ab\pi$

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  والنسبة

2008 تمهيدي

بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي  $\frac{1}{2}$  .

**sol:** في القطع الناقص  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 25, b^2 = 9, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 4$  في القطع الزائد  $(\pm 4, 0)$  بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد

$\Rightarrow c = 2a \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 12$

معادلة القطع الزائد  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

قطع مكافئ معادلته  $y^2 = hx$  دليله يمر بالنقطة  $(-6, 3)$  جد قيمة h.

2008 تمهيدي

**sol:**  $\frac{1}{4} y^2 = hx \Rightarrow y^2 = 4hx$  البؤرة تقع على محور السينات

$p = 6 \Rightarrow$  بؤرة القطع المكافئ  $f(6, 0) \Rightarrow$  معادلة الدليل  $x = -6$

$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 24x, y^2 = 4hx \Rightarrow 4h = 24 \Rightarrow h = 6$



قطع ناقص معادلته  $4x^2 + 2y^2 = K$  والبعد بين بؤرتيه  $2\sqrt{3}$  وحدة طول جد قيمة  $K$ .

2008 دور 1

**sol :**  $2c = 2\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3}$

$$[4x^2 + 2y^2 = k] \div k \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k}{2}} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{k}{2}, b^2 = \frac{k}{4}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left[\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + 3\right] \cdot 4 \Rightarrow 2k = k + 12 \Rightarrow k = 12$$

تذكر انه اذا تساوى  
بسطي كسرين اعطى لابين  
فان اكبرهما هو الاصغر  
مقاما

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$  ويمس دليل  
لقطع المكافئ الذي معادلته  $x^2 + 12y = 0$ .

2009 تمهيدي

2001 دور 1

2014 دور 2

2015 دور 1

**sol :**  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$  في القطع الناقص  $a^2 = 25, b^2 = 9$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

بؤرتا القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد  $(0, 4), (0, -4)$

$$x^2 + 12y = 0 \Rightarrow x^2 = -12y, x^2 = -4Py \Rightarrow 4P = 12 \Rightarrow P = 3$$

هي نقطة التماس مع القطع الزائد  $(0, 3) \Rightarrow$  معادلة الدليل  $y = 3$

$$a = 3, c = 4 \Rightarrow \text{في القطع الزائد} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 7$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$$
 معادلة القطع الزائد

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص  $25x^2 + 9y^2 = 225$  ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلته  $x^2 + 8y = 0$ .

2015 دور 3

جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد  $9y^2 - 16x^2 = 144$  ويقطع من محور  
السينات جزءا طوله 12 وحدة.

2009 دور 1

**sol :** في القطع الزائد  $[9y^2 - 16x^2 = 144] \div 144 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

$$a^2 = 16, b^2 = 9, c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

في القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل  $a = 5$  OR  $b = 5 \Rightarrow$  بؤرتي القطع الزائد  $(0, 5), (0, -5)$

بما ان الجزء المقطوع من محور السينات = 12 فان

$$2a = 12 \Rightarrow a = 6 \text{ OR } 2b = 12 \Rightarrow b = 6$$

نقوم باخذ احتمال واحد من كل احتمالين لينتج  $a = 6, b = 5$

بما ان القطبين يقعان على محور الصادات فان البؤرتين والرأسين يقعان على محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$
 معادلة القطع الناقص

Mob: 07902162268



2010 تمهيدي

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ  $y^2 = -8x$  وطول محوره الكبير يساوي ثلاثة امثال طول محوره الصغير .

**sol :**  $y^2 = -8x$  ,  $y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow (-2,0)$  بؤرة القطع المكافئ

$(\pm 2, 0) \Rightarrow c = 2 \in x\text{-axis}$  بؤرتي القطع الناقص

$$2a = 3(2b) \Rightarrow a = 3b \dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \dots (2)$$

$$9b^2 = b^2 + 4 \Rightarrow 8b^2 = 4 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1 \rightarrow \frac{2x^2}{9} + \frac{2y^2}{1} = 1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

2010 دور 1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره على المحورين الاحداثيين ويمر ببؤرة القطع المكافئ  $y^2 - 16x = 0$  ومساحة منطقة القطع الناقص تساوي  $20\pi$  وحدة مساحة .

**sol:** بؤرة القطع المكافئ  $(4,0) \Rightarrow 4p = 16 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow y^2 = 16x$  ,  $y^2 = 4px$

$(4,0) \in$  القطع الناقص  $\Rightarrow$  either  $a = 4$  OR  $b = 4$

$$ab\pi = 20\pi \Rightarrow ab = 20$$

$$\text{if } a = 4 \Rightarrow 4b = 20 \Rightarrow b = 5 \quad \text{تعمل}$$

$$\text{if } b = 4 \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5$$

بما ان القطب يقع على محور السينات فان البؤرتين والرأسين على محور الصادات

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

2010 دور 2

اذا كانت  $Ky^2 + 3x^2 = Z$  معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بنقطة

تقاطع المستقيم  $2x + y = \sqrt{3}$  مع المحور الصادي علما ان مساحة منطقتة  $2\sqrt{3}\pi$  وحدة

مساحة جد قيمتي  $K, Z$

**sol :** if  $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3} \Rightarrow (0, \sqrt{3}) \in \text{Ellipse}$

لان البؤرة تقع على محور السينات  $b = \sqrt{3}$

$$2\sqrt{3}\pi = ab\pi \Rightarrow 2\sqrt{3}\pi = \sqrt{3}a\pi \Rightarrow a = 2$$

$$[Ky^2 + 3x^2 = Z] \div Z \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{Z}{K}} + \frac{x^2}{\frac{Z}{3}} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{Z}{3}, b^2 = \frac{Z}{K}$$

$$4 = \frac{Z}{3} \Rightarrow Z = 12, 3 = \frac{Z}{K} \Rightarrow 3 = \frac{12}{K} \Rightarrow K = 4$$

Mob: 07902162268



جد قيمة A وبؤرة ودليل القطع المكافئ الذي معادلته  $Ax^2 + 8y = 0$  المار بالنقطة (2,1) تلميح ١١ السؤال نفسه سؤال تمارين القطع المكافئ وتم عكس احداثي النقطة .

2011 دور 1

الحل ١ اي نقطة تنتمي الى القطع المكافئ تحقق معادلته

$$Ax^2 + 8y = 0 \Rightarrow 4A + 8 = 0 \Rightarrow 4A = -8 \Rightarrow A = -2$$

$$-2x^2 = -8y \Rightarrow x^2 = 4y, \quad x^2 = 4py \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$$

$$f(0, p) = (0, 1) \text{ بؤرة القطع المكافئ } y = -p \Rightarrow y = -1 \text{ معادلة الليل}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقتة  $7\pi$  وحدة مربعة ومحيطه يساوي  $10\pi$  وحدة .

2011 دور 2

2015 ح 4 مساحة

$$(1) \dots \Rightarrow a = \frac{7}{b} \quad A = a b \pi = 7 \pi \Rightarrow ab = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{b} \text{ مساحة القطع الناقص}$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 10\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 5 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} = 25$$

$$a^2 + b^2 = 50 \dots (2)$$

$$\frac{49}{b^2} + b^2 = 50 \Rightarrow 49 + b^4 = 50b^2 \Rightarrow b^4 - 50b^2 + 49 = 0$$

$$(b^2 - 49)(b^2 - 1) = 0$$

$$\text{يهمل } b^2 = 49 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{7} = 1 \text{ اما}$$

$$\text{او } b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 7$$

$$\text{معادلة القطع الناقص } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$$

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي 6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) وبؤرتاه تقعان على محور السينات .

2011 خارج

$$\text{sol : } 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$\frac{c}{a} = 2 \Rightarrow c = 2a \Rightarrow c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 27$$

$$\text{معادلة القطع الزائد } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$



2012 خارج

قطع ناقص رأساه  $(0, \pm 5)$  واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والمار  
لدليله بالنقطة  $(4, -3)$  جد معادلة القطعين المكافئ والناقص .

الحل | بما ان رأسى القطع الناقص يقعان على محور السينات فإن بؤرتيه يقعان على محور السينات ايضاً  
اي ان بؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات كذلك .

ولأن دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة  $(4, -3)$  فإن معادلة الليل  $x = -3$

معادلة القطع المكافئ  $y^2 = 12x \Rightarrow y^2 = 4px \Rightarrow p = 3$  بؤرة القطع المكافئ  $F(3, 0)$

$c = 3 \Rightarrow$  بؤرتي القطع الناقص  $(0, \pm 3)$

$a = 5 \Rightarrow$  رأسى القطع الناقص  $(\pm 5, 0)$

$b^2 = 16 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 16$

معادلة القطع الناقص  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2013 خارج

جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل والنسبة بين  
طولي محوريه كنسبة 1:2 ويقطع القطع المكافئ  $y^2 = 8x$  عند  $x = 2$

في القطع المكافئ  $y^2 = 8x$  عند  $x = 2$  فان

الحل :-

$y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow (2, 4), (2, -4) \in \text{Ellipse}$

في القطع الناقص (1) .....  $2a = 2(2b) \Rightarrow 2a = 4b \Rightarrow a = 2b$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{(2b)^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{17}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 17 \Rightarrow b = \sqrt{17} \Rightarrow a = 2\sqrt{17}$

معادلة القطع الناقص  $\frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$

تأكيد || لو ان البؤرتان على محور الصادات

لكانت المعادلة  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{32} = 1$

2013 خارج

جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتي القطع الناقص  $9x^2 + 5y^2 = 45$  والمسافة  
بين بؤرتيه تساوي ضعف طول محوره المرافق .

في القطع الناقص  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$   $\Rightarrow [9x^2 + 5y^2 = 45] \div 45$   $\text{sol} :$

$a^2 = 9, b^2 = 5, c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4 \Rightarrow c = 2 \in y\text{-axis}$

القطع الزائد  $a = 2 \in$  بؤرتي القطع الناقص وهما رأسى القطع الزائد  $(0, \pm 2)$

$2c = 2(2b) \Rightarrow c = 2b \dots (1)$

$c^2 = a^2 + b^2 \dots (2)$

$4b^2 = 4 + b^2 \Rightarrow 3b^2 = 4 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3}$

معادلة القطع الزائد  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{\frac{4}{3}} = 1$



جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه  $F_1, F_2(\pm 4, 0)$  والنقطة  $P$  تنتمي اليه بحيث ان محيط

2014 دور 1

المثلث  $PF_1F_2$  يساوي 24 وحدة ؟

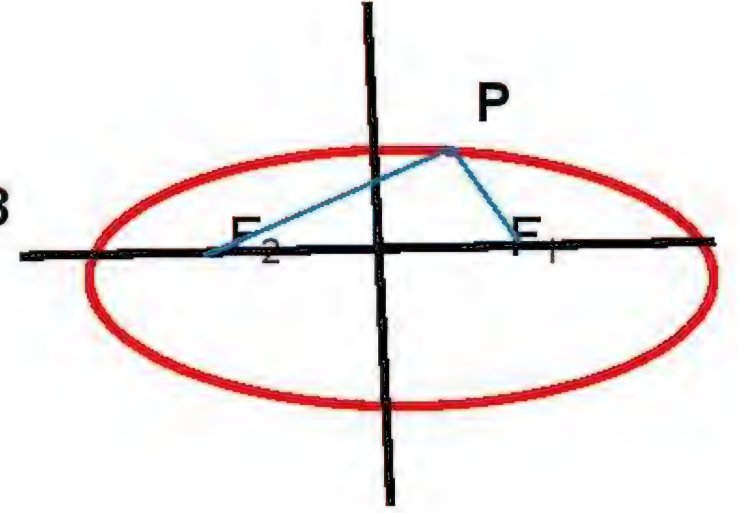
**sol :**  $(4, 0) = (c, 0) \Rightarrow c = 4$

$$PF_1 + PF_2 + F_1F_2 = 24$$

$$2a + 2c = 24 \Rightarrow 2a + 8 = 24 \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 64 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 48$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$
 معادلة القطع الناقص



جد معادلة القطع الذي بؤرتاه  $(\pm 5, 0)$  والنقطة  $Q$  تنتمي اليه بحيث ان المثلث

2016 دور 2 خارج

$QF_1F_2$  محيطه يساوي 30 وحدة طول .

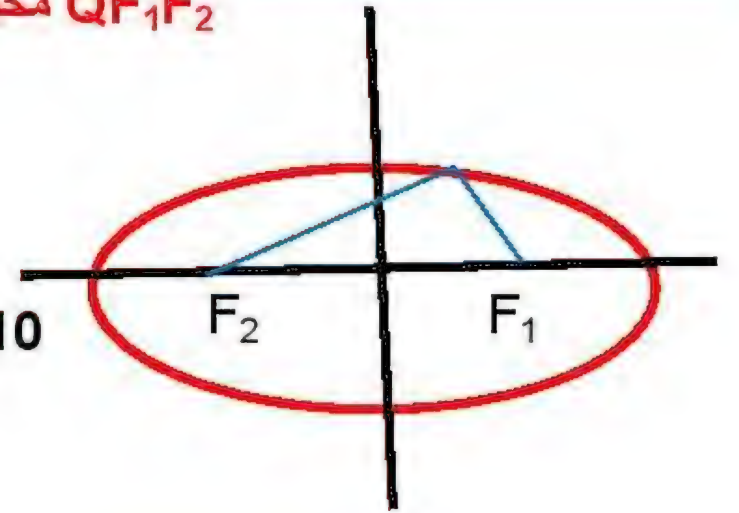
**sol :**  $(5, 0) = (c, 0) \Rightarrow c = 5$

$$QF_1 + QF_2 + F_1F_2 = 30$$

$$2a + 2c = 30 \Rightarrow 2a + 10 = 30 \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 25 \Rightarrow b^2 = 75$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$$
 معادلة القطع الناقص



جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ  $x^2 = 24y$  ومجموع طولي محوريه (36) وحدة .

2012 تمهيدي

**الحل :- :-** في القطع المكافئ  $x^2 = 24y$  ,  $x^2 = 4Py \Rightarrow 4P = 24 \Rightarrow P = 6$

$$c = 6 \Rightarrow \text{بؤرتي القطع الناقص } (0, 6), (0, -6)$$

في القطع الناقص (1)  $2a + 2b = 36 \Rightarrow a + b = 18 \Rightarrow a = 18 - b$  .....

(2)  $a^2 = b^2 + c^2$  .....

$$(18 - b)^2 = b^2 + 36 \Rightarrow 324 - 36b + b^2 = b^2 + 36$$

$$36b = 324 - 36 \Rightarrow 36b = 288 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 18 - 8 \Rightarrow a = 10$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$$
 معادلة القطع الناقص



2014 نارحين

جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 ، 5 على الترتيب وبؤرتاه تقعان على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل.

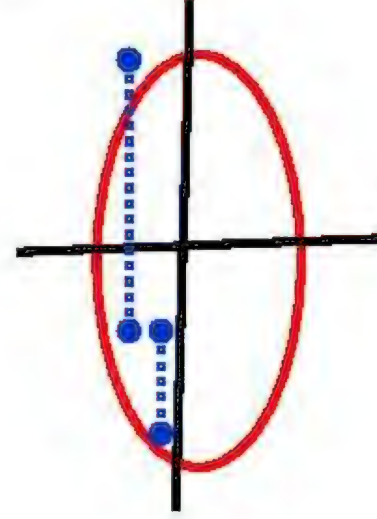
sol : بما ان موقع البؤرة غير معلوم فيجب اخذ الاحتمالان معا

$$2a = 1 + 5 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$2c = 5 - 1 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 5$$

معادلة القطع الناقص  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1$



يدور القمر حل الارض في مدار على صورة قطع ناقص سيني البؤرتين . تقع الارض في إحدى بؤرتيه فاذا كانت اطل مسافة بين الارض والقمر 90Km واقصر مسافة بينهما 10km جد الاختلاف المركزي للقطع

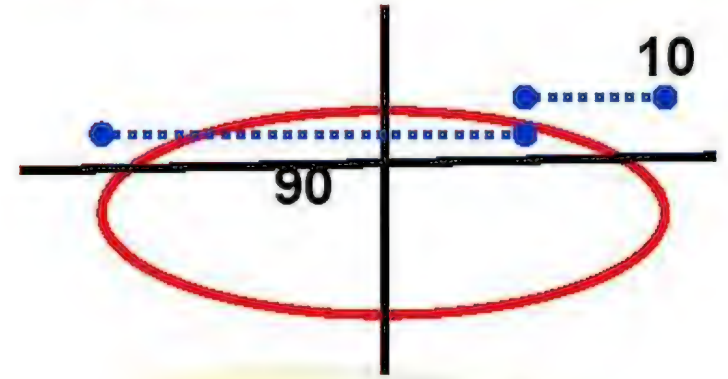
2016 دور 2 خارج

sol :

$$2a = 90 + 10 \Rightarrow 2a = 100 \Rightarrow a = 50$$

$$2c = 90 - 10 \Rightarrow 2c = 80 \Rightarrow c = 40$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$



التقييم | فكرة السؤال منهجية ولكن واضح السؤال قد اخفق في تقدير المسافة المنطقية بين الارض والقمر وواقع نفسه في اشكال منطقي رغم ذلك يعد السؤال من الاسئلة السهلة نسبيا .

Mob: 07902162268

46

اعدادية الكاظمية للبنين



2012 دور 2

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءا طوله 8 وحدات ومساحة منطقتة  $24\pi$  وحدة مساحة ؟

$$\text{sol: } A = ab\pi \Rightarrow 24\pi = ab\pi \Rightarrow ab = 24$$

الجزء المقطوع من محور السينات يمثل ( اما المحور الكبير  $2a$  ) او ( المحور الصغير  $2b$  )

$$\text{if } 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 4b = 24 \Rightarrow b = 6$$

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 4a = 24 \Rightarrow a = 6$$

بما ان الجزء المقطوع من محور السينات يمثل المحور الصغير فان البؤرتين والرأسين يقعان على محور الصادات اي ان معادلة القطع الناقص هي

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{16} = 1$$

عين البؤرة والرأس ومعالتي كل من الدليل والمحور للقطع المكافئ  $y^2 + 4y + 2x = -6$

2012 دور 1

$$\text{sol: } y^2 + 4y + 2x = -6 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = -2x - 6 + 4$$

$$\Rightarrow (y + 2)^2 = -2x - 2$$

$$(y + 2)^2 = -2(x + 1), (y - k)^2 = -4p(x - h) \Rightarrow 4p = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

$$F(h-p, k) = F(-\frac{3}{2}, -2) \text{ البؤرة , } V(h, k) = (-1, -2) \text{ الرأس}$$

$$x = h+p \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ معادلة الدليل , } y = k \Rightarrow y = -2 \text{ معادلة المحور}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ  $y^2 - 12x = 0$  وطول محوره الصغير يساوي 8 وحدات .

2014 تمهيدي

$$\text{sol: } y^2 = 12x, y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow (3, 0) \text{ بؤرة القطع المكافئ}$$

$$(\pm 3, 0) \text{ بؤرتي القطع الناقص} \Rightarrow c = 3 \in x\text{-axis}$$

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ معادلة القطع الناقص}$$



جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تقعان على محور السينات ومجموع

طولي محوريه يساوي 16 وحدة طول وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد  $x^2 - 2y^2 = 6$  2014 دور 4 انبار

$$\text{sol: } [x^2 - 2y^2 = 6] \div 6 \Rightarrow \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow \text{في القطع الزائد } a^2 = 6, b^2 = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6 + 3 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$$

في القطع الناقص  $c = 3 \Rightarrow$  بؤرتي القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص  $(3, 0), (-3, 0)$ 

$$2a + 2b = 16 \Rightarrow a + b = 8 \Rightarrow a = 8 - b \quad \dots\dots(1, \quad a^2 = b^2 + c^2 \quad \dots\dots(2$$

$$(8 - b)^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 64 - 16b + b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 16b = 55 \Rightarrow b = \frac{55}{16} \Rightarrow b^2 = \frac{3025}{256}$$

$$a^2 = \frac{3025}{256} + 9 = \frac{5329}{256}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{256x^2}{5329} + \frac{256y^2}{3025} = 1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

عزيزي الطالب من المحتمل ان مجموع طولي محوري القطع الناقص هي 18 بدءاً من 16 وهناك خطأ مطبعي

في السؤال ليكون الجواب هو

$$\text{sol: } [x^2 - 2y^2 = 6] \div 6 \Rightarrow \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow \text{في القطع الزائد } a^2 = 6, b^2 = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6 + 3 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$$

في القطع الناقص  $c = 3 \Rightarrow$  بؤرتي القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص  $(3, 0), (-3, 0)$ 

$$2a + 2b = 18 \Rightarrow a + b = 9 \Rightarrow a = 9 - b \quad \dots\dots(1, \quad a^2 = b^2 + c^2 \quad \dots\dots(2$$

$$(9 - b)^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 81 - 18b + b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 18b = 72 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$$

$$a^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

إذا كانت  $e + id = \frac{4+2i}{1-i}$  جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه  $(0, d)$  وطول محورهالكبير يساوي  $2||e + id||$ 

2014 دور 4 انبار

$$\text{sol: } e + id = \frac{4+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{4+4i+2i+2i^2}{1+1} = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i \Rightarrow e = 1, d = 3$$

$$2||e + id|| = 2||1 + 3i|| = 2\sqrt{1+9} = 2\sqrt{10}$$

$$(0, d) = (0, 3) \Rightarrow c = 3 \quad \text{إحدى بؤرتي القطع الناقص}$$

$$2a = 2\sqrt{10} \Rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{10} + \frac{x^2}{1} = 1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

Mob: 07902162268



جسر على شكل نصف قطع ناقص ، المسافة بين نهايتي قاعدته (24 m) وارتفاعه (9 m) جد ارتفاع الجسر عند النقطة التي تبعد عن بدايته (6 m)

2014 تمهيدي

الحل | نفرض ان مركز الجسر هو نقطة الاصل فيكون طول الجسر الافقي هو المحور الكبير للقطع الناقص وارتفاعه هو نصف المحور الصغير  $2a = 24 \Rightarrow a = 12$  ,  $b = 9$

وعلى اعتبار ان اي نقطة تقع على القطع الناقص تحقق معادلته فان النقطة التي تبعد عن بداية الجسر 6 متر هي النقطة التي تبعد عن نقطة الاصل 6 متر ايضا اي ان احداثيها السيني يساوي 6 والمطلوب الارتفاع الذي يمثل الاحداثي الصادي للنقطة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{144} + \frac{y^2}{81} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{y^2}{81} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{81} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{y^2}{81} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{243}{4} \Rightarrow y = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

جد معادلة القطع الناقص والزائد اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الآخر وكلاهما تقعان على المحور السيني وطول المحور الكبير يساوي  $6\sqrt{2} \text{ m}$  وطول المحور الحقيقي يساوي 6m

2014 تمهيدي

الحل | في القطع الناقص  $2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

في القطع الزائد  $2a = 6 \Rightarrow a = 3$  وبما انهما كل منهما يمر ببؤرتي الآخر فان راسي القطع الناقص هما ببؤرتي القطع الزائد وبؤرتي القطع الناقص هما راسي القطع الزائد وعليه فان

في القطع الناقص  $a = 3\sqrt{2}$  ,  $c = 3 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 18 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الناقص  $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

في القطع الزائد  $c = 3\sqrt{2}$  ,  $a = 3 \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow 18 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الزائد  $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني

2014 خارج

$x^2 + y^2 - 3x = 16$  مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ  $y^2 = 12x$  .

الحل :- في المنحني  $x^2 + y^2 - 3x = 16$  عن  $x = 0$  فان

$c = 4$  ببؤرتي القطع الناقص  $(0, 4)$  ,  $(0, -4)$   $\Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow y^2 = 16$

في القطع المكافئ  $y^2 = 12x$  ,  $y^2 = 4Px \Rightarrow 4P = 12 \Rightarrow P = 3$

القطع الناقص  $\Rightarrow$  نقطة التماس  $(-3, 0)$   $\Rightarrow$  معادلة الدليل  $x = -3$

لأن البؤرتين تقعان على محور الصادات والنقطة تقع على محور السينات  $b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25$

معادلة القطع الناقص  $\Rightarrow \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$



جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه  $(0, \pm 6)$  ويتقاطع مع محور السينات عند  $x = \pm 4$  ومركزه نقطة الاصل .

2014 دور 4 انبار

**sol :**  $c = 6$  ,  $a = 4$  ,  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 20$

معادلة القطع الزائد  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$

اكتب المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت ان احد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 ، 1 على الترتيب اذا علمت ان محوره ينطبقان على المحورين الاحداثيين .

2015 تمهيدي

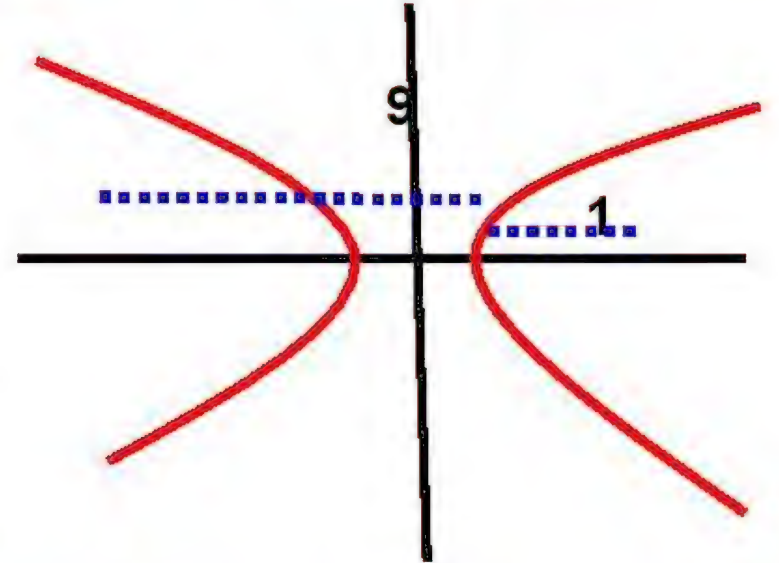
**sol :**  $2c = 1 + 9 \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5$

$2a = 9 - 1 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الزائد  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  اما

معادلة القطع الزائد  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$  او



ملاحظة ( منهجية ) اذا كانت احد رأسي قطع زائد يبعد عن البؤرتين بعددين فان مجموعهما يمثل  $2c$  وفرقهما الموجب يمثل  $2a$  .

ملاحظة ( غير منهجية ) حاصل ضرب بعدي الرأس في القطع الزائد عن البؤرتين يساوي  $b^2$

جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه النقطتان  $(\pm 5, 0)$  وطول محوره الكبير يساوي 12 وحدة .

2015 دور 1

**sol:**  $c = 5 \in x\text{-axis}$  ,  $2a = 12 \Rightarrow a = 6$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 25 \Rightarrow b^2 = 11$

معادلة القطع الناقص  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$

التقييم 11 سؤال سهل جدا جدا واعتقد ان ماكان مقدر له ان يكون باستخدام التعريف وقد تم تخفيف السؤال على الطالب بشكل كبير علما ان الطالب الذي استخدم التعريف في حله يعطى درجة كاملة .



ليكن  $5y^2 - 4x^2 = k$  قطع زائد احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ  
 $4y - \sqrt{5}x^2 = 0$  جد قيمة  $k$ .

2015 دور 2

**sol :**  $4y - \sqrt{5}x^2 = 0 \Rightarrow 4y = \sqrt{5}x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}y$  ,  $x^2 = 4Py \Rightarrow 4P = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{5}}$   
 $c = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$  بؤرتى القطع الزائد  $(0, \frac{1}{\sqrt{5}})$  ,  $(0, -\frac{1}{\sqrt{5}})$  بؤرة القطع المكافئ  $(0, \frac{1}{\sqrt{5}})$   
 $[5y^2 - 4x^2 = k] \div k \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{k}{5}} - \frac{x^2}{\frac{k}{4}} = 1$  فى القطع الزائد  $\Rightarrow a^2 = \frac{k}{5}$  ,  $b^2 = \frac{k}{4}$   
 $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow [\frac{1}{5} = \frac{k}{5} + \frac{k}{4}] \cdot 20 \Rightarrow 4 = 4k + 5k \Rightarrow 9k = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{9}$

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور الصادات ومساحته  $32\pi$   
 وحدة مساحة والنسبة بين طولى محوريه كنسبة  $1/2$

2015 دور 2

**sol:**  $\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b$  .....(1)

$a b \pi = 32 \pi \Rightarrow 2b^2 = 32 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 8$

معادلة القطع الناقص  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{16} = 1$



جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين (3 , 4) , (2 , 6) .

2016 دور 1 غ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

المعادلة القياسية للقطع الناقص هي

الحل:-

$$[ \frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 ] \cdot a^2 b^2 \Rightarrow 16b^2 + 9a^2 = a^2 b^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$[ \frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 ] \cdot a^2 b^2 \Rightarrow 36b + 4a^2 = a^2 b^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

اذا تساوى الطرف الايمن في اي معادلتين تساوى فيهما الطرف الايسر  $36b + 4a^2 = 16b^2 + 9a^2$

$$20b^2 = 5a^2 \Rightarrow a^2 = 4b^2 \quad \dots\dots (3) \text{ in } (1)$$

$$16b^2 + 36b^2 = 4b^4 \Rightarrow [ 52b^2 = 4b^4 ] \div b^2 \Rightarrow b^2 = 13 \text{ in } (3) \Rightarrow a^2 = 52$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$$

تقييم السؤال || السؤال منهجي جدا وهو موجود في الكتاب المنهجي وتم استبدال النقطة (4 , 3) في الكتاب المنهجي الى النقطة (3 , 4) في هذا السؤال مع الابقاء على النقطة (2 , 6) على حالها وبذلك سوف تتغير معادلة

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$$

القطع الناقص علما ان المعادلة النهائية في الكتاب المنهجي هي

تلميح || القسمة على  $b^2$  في هذا السؤال جائزة ولكنها غير جائزة بشكل مطلق ويجب ان تعلم انه لايجوز القسمة

على متغير الا بعد التأكد انه لايساوي صفر وفي هذا السؤال نحن متأكدون ان  $b^2$  لايمكن ان تساوي صفر.



2016 دور 1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبعده البؤرى مساويا لبعء بؤرة القطع

المكافى عن دليله  $y^2 + 24x = 0$  اذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوى  $80\pi \text{ cm}^2$ فى القطع المكافى  $\text{sol : } y^2 + 24x = 0 \Rightarrow y^2 = -24x$  ,  $y^2 = -4px \Rightarrow 4p = 24 \Rightarrow p = 6$ تمثل المسافة بين بؤرة القطع المكافى المعطى ودليله  $2p = 12$ فى القطع الناقص  $2c = 2p \Rightarrow 2c = 12 \Rightarrow c = 6$ فى القطع الناقص  $ab\pi = 80\pi \Rightarrow ab = 80 \Rightarrow a = \frac{80}{b}$  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (\frac{80}{b})^2 = b^2 + 36 \Rightarrow [\frac{6400}{b^2} = b^2 + 36] \cdot b^2$  $6400 = b^4 + 36b^2 \Rightarrow b^4 + 36b^2 - 6400 = 0$  $(b^2 + 100)(b^2 - 64) = 0 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 10$ 

بما انه لم يذكر موقع بؤرة القطع الناقص فأن المعادلة يمكن ان تكون بكلا الاحتمالين

معادلة القطع الناقص  $\text{either } \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$ معادلة القطع الناقص  $\text{OR } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ 

تأكيد || ان وجود معادلة سينية للقطع المكافى لاتعنى ان بؤرة القطع الناقص تقع على محور السينات لان وصف البعد فى السؤال يشير الى قيمة عددية للبعد بين البؤرتين وليس موقعهما . اما لفظ البعد البؤرى فهو لفظ غير وارد فى المنهج العراقى وغير وارد فى كل الاسئلة الوزارية السابقة ويمكن ان يشير الى قيمة  $c$  فقط وفى هذا السؤال كان المقصود هو  $2c$  وفى المنطق الرياضى يكون اى تعبير لفظى له اكثر من دلالة واحدة يشير الى خلل واضح فى اعداد السؤال وهذا مالايجب حدوثه فى الاسئلة الوزارية .

السؤال منهجى بالرغم من عدم وجوده نصا فى الكتاب المقرر وصيغته ركيكة بعض الشئ فيجب ان يقال ان

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبعده البؤرى مساويا لبعء بؤرة القطع المكافى  $y^2 + 24x = 0$  عن دليله اذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوى  $80\pi \text{ cm}^2$  .



جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الآخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي  $6\sqrt{2}$  وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي 6 وحدة طول .

الحل | بما ان القطعان الزائد والناقص كل منهما يمر ببؤرة الآخر فإن بؤرتي القطع الناقص هما رأسي القطع الزائد ورأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد .

$$2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \text{ في القطع الناقص}$$

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3 \text{ في القطع الزائد}$$

$$c = 3 \Rightarrow \text{هما بؤرتي القطع الناقص } ( \pm 3, 0 ) , \text{ هما رأسي القطع الناقص } ( \pm 3\sqrt{2}, 0 )$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 18 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ معادلة القطع الناقص}$$

$$a = 3 \Rightarrow \text{هما رأسي القطع الزائد } ( \pm 3, 0 ) , \text{ هما بؤرتي القطع الزائد } ( \pm 3\sqrt{2}, 0 )$$

$$c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow 18 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ معادلة القطع الزائد}$$

السؤال منهجي بالرغم من عدم وجوده نصا في الكتاب المقرر على الرغم من ان لغة السؤال ركيكة بعض الشيء وينقصه ان يذكر فيه ان القطعان مركزيهما نقطة الاصل .



2016 تمهيدي

جد معادلة القطع المخروطي الذي رأسه نقطة الاصل وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين

اختلافه المركزي يساوي 3 ويمر بالنقطة (2, 0)

الحل ١ بما ان الاختلاف المركزي اكبر من (1) فان القطع المخروطي هو قطعاً زائداً

اذا مر القطع الزائد بنقطة تقع على احد المحورين وكان مركزه نقطة الاصل فانها تمثل الرأس حتماً

$$a = 2, \frac{c}{a} = 3 \Rightarrow c = 3a \Rightarrow c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 32$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$

بما ان الرأس يقع على محور الصادات فان المعادلة

2016 تمهيدي

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ

$$x^2 - 16y = 0 \text{ وطول محوره الكبير يساوي } 12 \text{ وحدة.}$$

$$\text{الحل :- في القطع المكافئ } x^2 - 16y = 0 \Rightarrow x^2 = 16y, x^2 = 4Py \Rightarrow 4P = 16 \Rightarrow P = 4$$

بؤرة القطع المكافئ هي (4, 0) أي ان بؤرتي القطع الناقص هي (4, 0)، (-4, 0) أي ان c = 4

$$2a = 12 \Rightarrow a = 6, c = 4$$

في القطع الناقص

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 20$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{20} = 1$$

معادلة القطع الناقص

مثال الكتاب | جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ  $y^2 - 12x = 0$  وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ  $y^2 - 12x = 0$  وطول محوره الصغير يساوي 8 وحدات .

2014 تمهيدي



### حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الثالث ( المسائل المرتبطة بالزمن )

جد نقطة او اكثر تنتمي الى الدائرة  $x^2 + y^2 - 4x = 4$  عندها يكون معدل تغير  $x$  بالنسبة للزمن مساويا الى معدل تغير  $y$  بالنسبة للزمن .

1996 دور 1

sol : let  $M(x, y)$  ;  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$$x^2 + y^2 - 4x = 4$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} - 4 \frac{dx}{dt} = 0$$

$$2x \frac{dx}{dt} - 4 \frac{dx}{dt} = -2y \frac{dy}{dt} \Rightarrow (2x - 4) \frac{dx}{dt} = (-2y) \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow [(2x - 4) = (-2y)] \div 2 \Rightarrow x - 2 = -y \Rightarrow y = 2 - x \dots\dots (1)$$

$$x^2 + y^2 - 4x = 4 \dots\dots (2)$$

$$x^2 + (2 - x)^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ OR } x = 4 \Rightarrow y = 2 - 4 = -2$$

$$M = \{(0, 2), (4, -2)\}$$

سيارة تسير بسرعة  $30 \text{ m/s}$  اجتازت اشارة مرور حمرار ارتفاعها  $3 \text{ m}$  عن سطح الارض وبعد ان ابتعدت عنها مسافة  $3\sqrt{3} \text{ m}$  اصطدمت بسيارة اخرى نتيجة عدم الالتزام بقوانين المرور جد سرعة تغير المسافة بين السيارة والاشارة الضوئية .

1997 دور 1

تلميح || هذا السؤال لكي يكون منطقيا يجب ان تكون الاشارة المرورية معلقة والسيارة تمر من تحتها مباشرة وفي غير هذه الحالة اي انه ان كانت الاشارة تقع اعلى عمود مستقر على الارض عندها يجب ان يكون العمود على الرصيف وليس في وسط الشارع والا اصطدمت السيارة به .

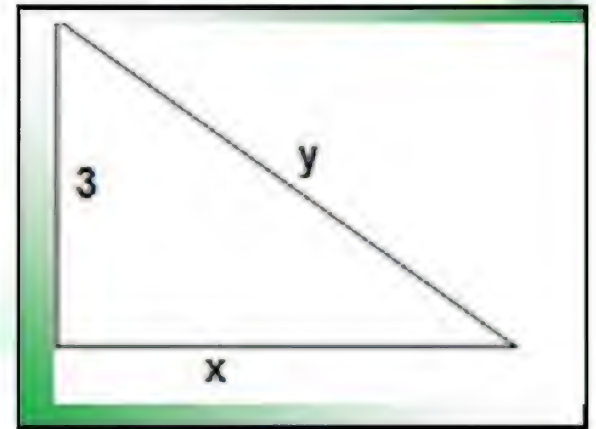
الحل || نفرض ان بعد السيارة عن مسقط الاشارة المرورية على الارض  $x$  ونفرض ان بعدها عن الاشارة  $y$

$$y^2 = x^2 + 9$$

$$y = 3\sqrt{3} \Rightarrow 27 = x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

$$2y \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \Rightarrow y \frac{dy}{dt} = x \frac{dx}{dt}$$

$$3\sqrt{3} \frac{dy}{dt} = 3\sqrt{2} (30) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{3\sqrt{2} (30)}{3\sqrt{3}} = 10\sqrt{6} \text{ m/s}$$



Mob: 07902162268

56

اعدادية الكاظمية للبنين



قطار نو عربة واحدة يسير بسرعة (30 m/s) اجتازت شجرة ارتفاعها 3 m عن سطح الأرض وبعد ان ابتعدت عنها مسافة  $3\sqrt{3}$  m توقف نتيجة وجود عمل اربابي على السكة احسب سرعة تغير المسافة بين القطار وقمة الشجرة ؟

2010 تمهيدي

تلميح || هذا السؤال فيه اشكال كبير من حيث المنطوق لان الشجرة لا يمكن ان تكون على السكة مباشرة ولا يمكن تفسير الشجرة على انها معلقة كما في تفسير سؤال الاشارة المرورية لذا فان السؤال على وضعه الحالي فيه اشكال كبير ولا يمكن ان يكرر في الامتحان الا بعد ادخال التعديل ادناه عليه ليكون سؤالاً ليس بسهل التعديل المقترح (( ان اقرب مسافة بين الشجرة والسكة هي 3 متر )) ، ((كما سنفترض انه يبتعد عن قمته)) وسيصبح الحل بالشكل ادناه :-

الحل || في المثلث acb القائم الزاوية في c نفرض ان  $ab = y$  والذي يمثل قطر متوازي المستطيلات حيث ان bc يمثل الشجرة و cd اقرب مسافة بين قاعدة الشجرة والسكة

$$y^2 = z^2 + 9$$

$$[ y = 3\sqrt{3} \Rightarrow 27 = z^2 + 9 \Rightarrow z^2 = 18 \Rightarrow z = 3\sqrt{2}$$

$$2y \frac{dy}{dt} = 2z \frac{dz}{dt} \Rightarrow y \frac{dy}{dt} = z \frac{dz}{dt} \dots (1)$$

ي المثلث adc القائم الزاوية في d نفرض ان  $ac = z$  ,  $ad = x$

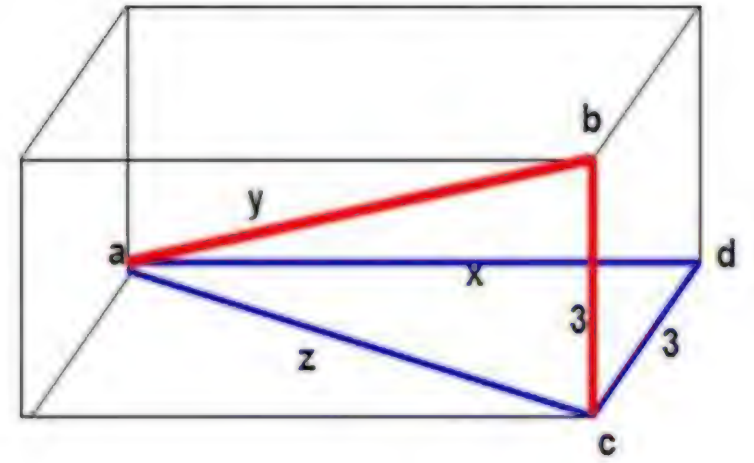
$$z^2 = x^2 + 9 \Rightarrow 18 = x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \Rightarrow z \frac{dz}{dt} = x \frac{dx}{dt} \dots (2) \quad \text{موض 1 في 2}$$

$$y \frac{dy}{dt} = x \frac{dx}{dt} \Rightarrow 3\sqrt{3} \frac{dy}{dt} = 3(30) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 10\sqrt{3} \text{ m/s}$$

تلميح || لو قيل ان القطار يبعد عن قاعدة الشجرة في لحظة ما يساوي  $3\sqrt{3}$  لكنت الخطوة الثانية في الحل هي :

$$[ z = 3\sqrt{3} \Rightarrow y^2 = 27 + 9 \Rightarrow y = 36 \Rightarrow y = 6]$$



اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل 0.5 cm/s بحيث يظل حجمها دائماً مساوياً  $320\pi \text{ cm}^3$  جد معدل تغير نصف قطر قاعدتها عندما يكون ارتفاعها 5 cm  
الحل || نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة = x ، ارتفاعها = h ، حجمها

2000 دور 2

2003 دور 2

2006 تمهيدي

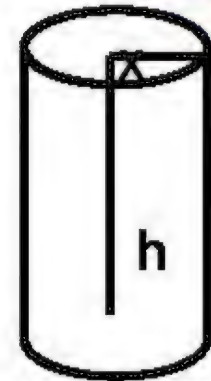
$$V = \pi x^2 h \Rightarrow 320\pi = \pi x^2 h \Rightarrow 320 = x^2 h$$

$$[ h = 5 \Rightarrow 320 = 5x^2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8 ] \quad \text{تعوض بعد الاشتقاق}$$

$$0 = x^2 \frac{dh}{dt} + h \cdot 2x \frac{dx}{dt}$$

$$0 = 64(0.5) + 5(16) \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -0.4 \text{ cm/s}$$

اي ان معدل نقصان  
نصف القطر يساوي  
0.4cm/s



$$V = 320\pi$$



خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيله قاعدته مربعة طولها 2 m يتسرب منه الماء بمعدل  $0.4 \text{ m}^3/\text{h}$  جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان في أي زمن t .

2011 دور 1

2013 دور 2

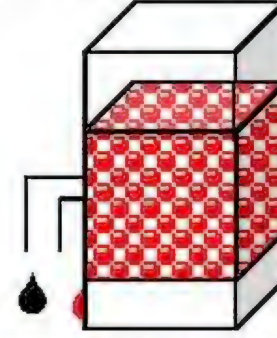
sol : let V = حجم متوازي المستطيلات , X = طول ضلع القاعدة المربعة , h = ارتفاع

$$V = X^2 h$$

$$X = 2 \text{ m} \Rightarrow V = 4h$$

$$\frac{dv}{dt} = 4 \frac{dh}{dt} \Rightarrow -0.4 = 4 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -0.1 \text{ m/h}$$

$$\frac{dh}{dt} = 0.1 \text{ m/h} \text{ معدل تغير انخفاض الماء في الخزان}$$



$$x = 2$$

$$\frac{dv}{dt} = -0.4$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

تذكير || الثابت الدائم يعوض قبل الاشتقاق والمتغير الدائم يعوض بعد الاشتقاق وأحيانا يعوض قبل الاشتقاق لإيجاد قيمة متغير دائم آخر ليتم تعويضهما معا بعد الاشتقاق

بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فإذا كان معدل نقصان نصف قطره

$(\frac{7}{22} \text{ cm/s})$  بحيث يبقى محافظا على شكله فعندما يكون نصف قطره 10 cm جد :

2004 دور 1

1 ( معدل نقصان حجمه ، 2 ) معدل نقصان مساحته السطحية

الحل | نفرض ان نصف قطر الكرة r وحجمها v ومساحتها السطحية A

$$v = \frac{4\pi}{3} r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4 \frac{22}{7} (100) \frac{-7}{22} = -400 \text{ cm}^3/\text{s}$$

اي ان معدل نقصان الحجم يساوي  $400 \text{ cm}^3/\text{s}$

$$A = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8 \frac{22}{7} (10) \frac{-7}{22} = -80 \text{ cm}^2/\text{s}$$

اي ان معدل نقصان المساحة السطحية تساوي  $80 \text{ cm}^2/\text{s}$

طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الاول بسرعة  $80 \text{ km/h}$  وتسير سيارة على الطريق

الآخر بسرعة  $60 \text{ km/h}$  جد معدل ابتعاد السيارتين بعد مرور ربع ساعة .

2009 دور 1

الحل | نفرض ان الطريقان المتعامدان x , y والبعد بين السيارتين z

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 80 \Rightarrow x = 80 \left(\frac{1}{4}\right) = 20 \text{ after } \frac{1}{4} h$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 60 \Rightarrow y = 60 \left(\frac{1}{4}\right) = 15 \text{ after } \frac{1}{4} h$$

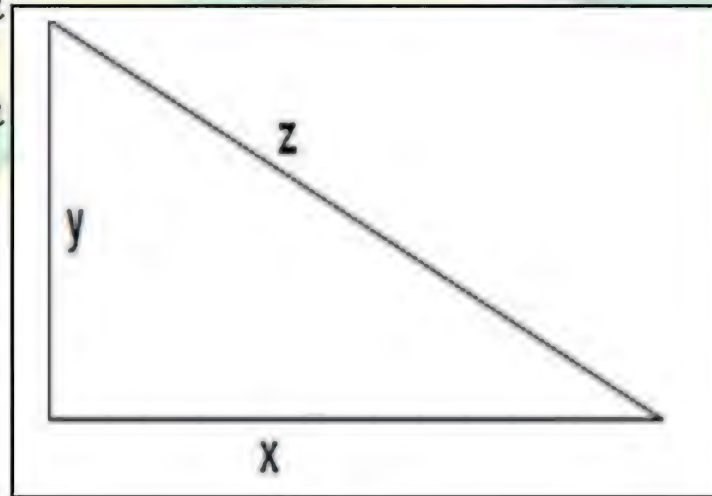
$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow z = 25$$

$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \Rightarrow z \frac{dz}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}$$

$$25 \frac{dz}{dt} = (80)(20) + (60)(15)$$

$$25 \frac{dz}{dt} = 2500 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 100 \text{ km/h}$$





بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فإذا كانت النسبة بين معدل نقصان حجمه الى معدل نقصان قطره (  $200\pi$  ) احسب معدل نقصان حجمه عندما يكون معدل النقصان في مساحته السطحية  $80\text{m}^2/\text{s}$ .

2008 دور 2

الحل || نفرض ان حجم البالون =  $V$  ، ومساحته السطحية =  $A$  ، ونصف قطره =  $r$

$$\frac{dv}{dt} = 200\pi \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 200\pi \frac{d2r}{dt}$$

$$\frac{d2r}{dt} = 2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt} \dots\dots (1)$$

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \dots\dots (2)$$

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt} \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$$

$$A = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$-80 = 80\pi \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-1}{\pi} \text{ (1) او في (2)}$$

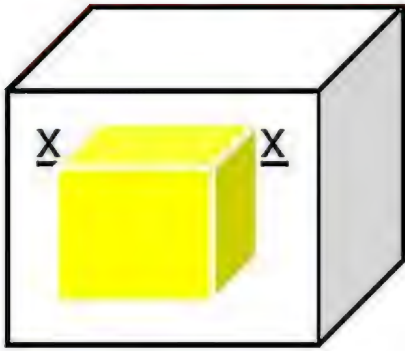
$$\frac{dv}{dt} = 400\pi \cdot \frac{-1}{\pi} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -400 \text{ m}^3/\text{s} \Rightarrow \text{معدل نقصانه } 400 \text{ cm}^3/\text{s} \Rightarrow \text{معدل تغير الحجم}$$

نلاحظ ان مشتقة قانون حجم الكرة تم الاستفادة منها مرتين ، مرة من خلال المعطومة المعطاة في السؤال ومرة اخرى من خلال اشتقاق قانون الحجم ومن خلال تساوي المعادلتين 1 مع 2 نستنتج قيمة  $r$

مكعب صلب طول حرفه 8 m مغطى بطبقة من الجليد بحيث يحافظ على شكله مكعبا ، فإذا بدأ الجليد يذوب بمعدل  $6 \text{ m}^3/\text{s}$  فجد معدل النقصان في سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد 1 m.

2011 خارج القطر

2014 داخل القطر



الحل :- نفرض ان سمك الجليد =  $x$  ، حجم المكعب = ( طول الضلع )<sup>3</sup>

$$V_1 = (8)^3 \leftarrow \text{طول ضلع المكعب الصغير} = 8$$

$$V_2 = (8 + 2x)^3 \leftarrow \text{طول ضلع المكعب الكبير} = (8 + 2x)$$

$$V = V_2 - V_1 \Rightarrow V = (8 + 2x)^3 - (8)^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3(8 + 2x)^2 \cdot (2) \frac{dx}{dt} + 0 \Rightarrow -6 = 3(8 + 2)^2 \cdot (2) \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{100} \text{ m/s}$$

$$\frac{dx}{dt} = -0,01 \text{ m/s} \text{ معدل تغير سمك الجليد OR } \frac{dx}{dt} = 0,01 \text{ m/s} \text{ معدل نقصان سمك الجليد}$$

ملاحظة| اذا ما عبرنا عن الناتج بمعدل النقصان فيكتب موجبا لأن الإشارة السالبة استعضنا عنها بوصف النقصان.

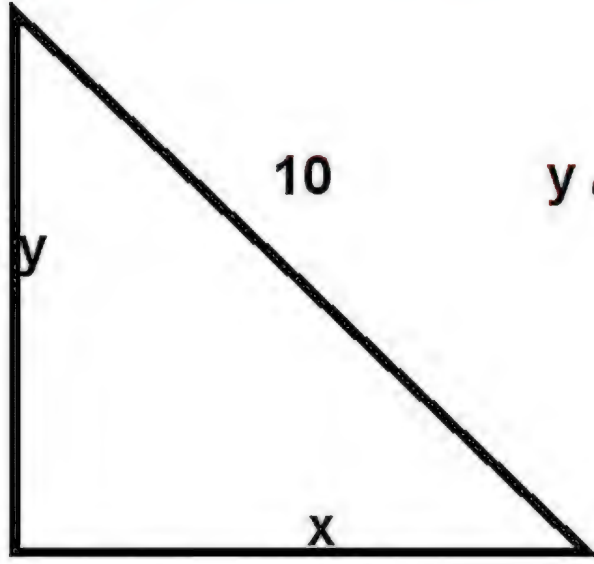


سلم طوله 10m يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية فإذا انزلق الطرف السفلي مبتعدا عن الحائط بمعدل 2 m/sec عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 8m من الحائط جد :

2012 دور 1

2014 دور 2

2014 تمهيدي



$$x=8, y=6$$

$$\frac{dx}{dt} = +2, \frac{dy}{dt} =$$

**الحل :-** (1) نفرض بعد قاعدة السلم عن الحائط  $x$  ، بعد رأس السلم عن الأرض  $y$

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$64 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$(2)(8)(2) + (2)(6) \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 12 \frac{dy}{dt} = -32 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3} \text{ m/sec}$$

أي ان معدل انزلاق الطرف العلوي  $\frac{8}{3} \text{ m/sec}$

(2) نفرض ان الزاوية بين السلم والأرض  $\theta$

$$\sin \theta = \frac{y}{10} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{10} y$$

$$\cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{dy}{dt}, \because \cos \theta = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{x}{10} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{8}{10} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \left(-\frac{8}{3}\right) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{3} \text{ rad/sec}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3} \text{ rad/sec}$$

تنبيه || السؤال ورد في اربع نماذج وزارية ولكن احيانا يكون مطلب واحد وهو الاول وحيانا يكون مطلبين معا .

ملاحظة مهمة || يمكن استخدام العلاقة في المطلب الثاني أي دالة نشاء سواء كانت  $\cos \theta = \frac{x}{10}$  او  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  فنحصل على نفس الاجابة ( جرب ذلك )

سلم طوله 13m يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية فإذا انزلق الطرف السفلي مبتعدا عن الحائط بمعدل 4 m/sec جد معدل انزلاق الطرف العلوي للسلم في اللحظة التي يكون فيها الطرف الأسفل للسلم على بعد 5 m من الحائط

2009 دور 2

**الحل يكون بنفس أسلوب السؤال اعلاه مع مراعاة تغيير اعداد السؤال والجواب ان معدل انزلاق الطرف**

**العلوي للسلم يساوي  $\frac{5}{3} \text{ m/s}$  مع التأكيد على ان الناتج النهائي سيكون سالبا وتم الاستعاضة عنه**

**بكلمة انزلاق :**



2011 دور 2

2014 دور 3

2015 نازحين 1

صفحة مستطيلة من المعدن مساحتها  $96 \text{ cm}^2$  يتمدد طولها بمعدل  $2 \text{ cm/s}$  بحيث تبقى مساحتها ثابتة ، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها  $8 \text{ cm}$  .

**sol :** let  $A =$  مساحة المستطيل ,  $X =$  طول المستطيل ,  $y =$  عرض المستطيل

$$A = X y$$

$$96 = 8X \Rightarrow X = 12$$

$$0 = X \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$$

$$0 = 12 \frac{dy}{dt} + (8) (2) \Rightarrow 12 \frac{dy}{dt} = -16 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3} \text{ cm/s}$$

اي ان العرض يتناقص بمعدل  $\frac{4}{3} \text{ cm/s}$  في تلك اللحظة

$$\frac{dx}{dt} = 2 , \frac{dy}{dt} = ?$$

$$A = 96 \text{ (ثابت)}$$

$$x = ? , y = 8$$



صفحة مستطيلة من المعدن مساحتها  $96 \text{ cm}^2$  يتمدد عرضها بمعدل  $2 \text{ cm/s}$  بحيث تبقى مساحتها ثابتة ، جد معدل التغير في الطول وذلك عندما يكون طولها  $12 \text{ cm}$  .

2016

دور 1

اختلاف بسيط في الارقام عن سؤال الكتاب والاسئلة الوزارية لثلاث سنوات متفرقة كما في ادناه مع التأكيد على ان الناتج السالب  $3 = -\frac{dx}{dt}$  يمثل معدل تغير طول المستطيل وينتهي السؤال به واذا طلب معدل التناقص فتستبدل الاشارة السالبة بكلمة نقصان .



عمود طوله 7.2 m في نهايته مصباح ، يتحرك رجل طوله 1.8 m مبتعدا عن العمود وبسرعة 30 m/min  
جد معدل تغير طول ظل الرجل .

الحل :- نفرض البعد بين قدم الرجل وقاعدة العمود = x ، نفرض ان طول ظل الرجل = y

تشابه المثلثين abc , aef

$$\frac{1.8}{7.2} = \frac{y}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{x+y}$$

$$x + y = 4y \Rightarrow x = 3y$$

$$\frac{dx}{dt} = 3 \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \left(\frac{30}{3}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = 10 \text{ m/min}$$

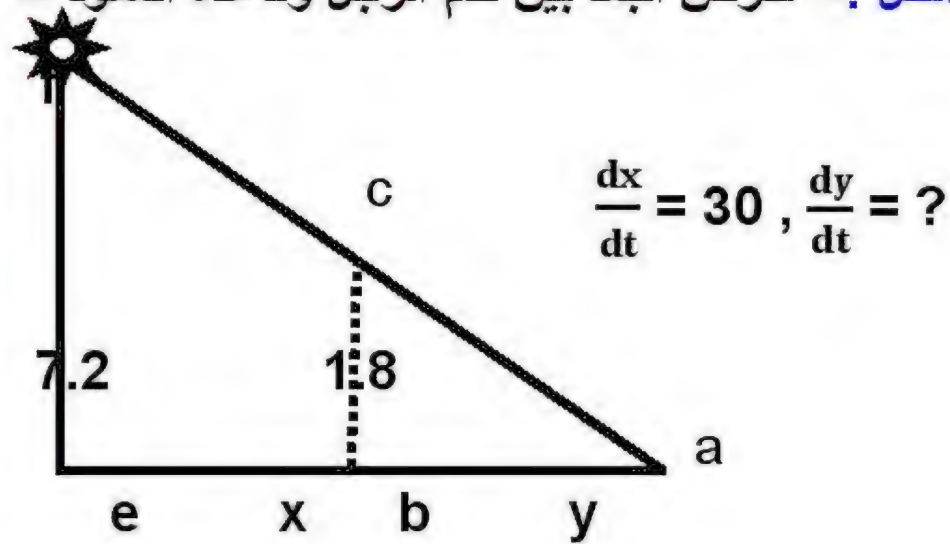
2012 تمهيدي

2013 دور 1

2014 تمهيدي في

2015 تمهيدي

2015 دور 1



$$\frac{dx}{dt} = 30, \frac{dy}{dt} = ?$$

ملاحظة || كلما يبتعد الرجل عن مصدر النور يزداد ظله والعكس صحيح  
تأكيد || لو طلب في هذا السؤال معدل تغير طول ظل رأس الرجل بالنسبة للقاعدة نفرض البعد بين ظل رأس الرجل والقاعدة y والبعد بين قدم الرجل والقاعدة x عندها سيكون البعد بين قدم الرجل وظل الرأس (y-x) ثم نجري التشابه . حاول ذلك ؟؟؟  
الجواب  $\frac{dy}{dt} = 40 \text{ m/min}$

كما يمكن الحل بنفس الطريقة السابقة ويضاف الناتج الى سرعة الرجل للحصول على نفس الجواب .  
عمود طوله 6.4 m في نهايته مصباح ، يتحرك رجل طوله 1.6 m مبتعدا عن العمود وبسرعة 30 m/min جد سرعة تغير طول ظل الرجل .

2015 دور 2

فنار ميناء ارتفاعه 20 m يعلوه مصباح كبير تحركت سفينة ارتفاعها 5m مبتعدة عن  
الفنار بسرعة 50 km/h جد تغير طول ظل السفينة على سطح البحر .

2016 دور 2 خارج

الحل :- نفرض البعد بين السفينة وقاعدة الفنار = x ، نفرض ان طول ظل السفينة = y

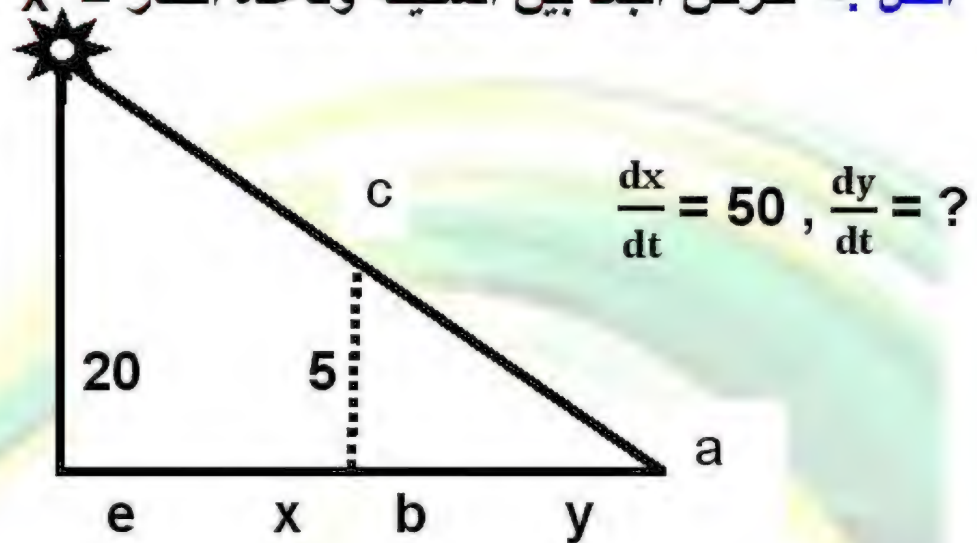
من تشابه المثلثين abc , aef

$$\frac{5}{20} = \frac{y}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{x+y}$$

$$x + y = 4y \Rightarrow x = 3y$$

$$\frac{dx}{dt} = 3 \frac{dy}{dt} \Rightarrow 50 = 3 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{50}{3}\right) \text{ km/h}$$



$$\frac{dx}{dt} = 50, \frac{dy}{dt} = ?$$

تأكيد | في عموم الاسئلة الفيزيائية اذا وجد اختلاف في وحدات السؤال يجب اللجوء الى توحيد الوحدات قبل الشروع في الحل  
ولكن في اسئلة التشابه الذي يعتمد في الاساس على مبدأ النسب فيجوز الشروع في الحل بعد التحقق من ان كل نسبة افقية او عمودية تحوي على نفس الوحدة كما حدث في هذا السؤال حيث ان  $\frac{m}{m} = \frac{km}{km}$  ويمكن جعلها بالصورة  $\frac{km}{km} = \frac{km}{km}$  وكلا الحلين صحيحين ويوصل الى نفس الناتج لذا اقتضى التنويه .



سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل  $2 \text{ m/s}$  جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي  $\frac{\pi}{3}$ .

2013 دور 1 خارج

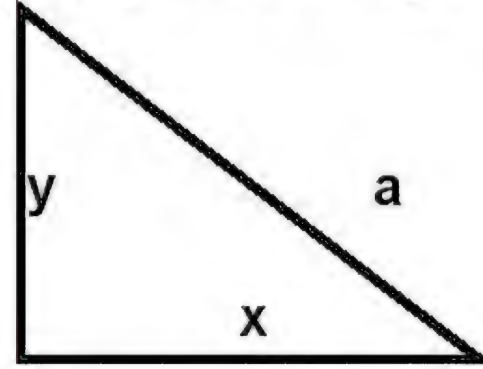
2015 خارج 1

**الحل :-** نفرض طولي الضلعين القائمي  $x, y$  وليكن طول الوتر  $a$  (عددا ثابتا)

$$a^2 = x^2 + y^2$$

$$0 = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \dots\dots(1)$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3}x \dots\dots(2)$$



$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$

$$0 = 2x(2) + 2\sqrt{3}x \frac{dy}{dt} \Rightarrow 2\sqrt{3}x \frac{dy}{dt} = -4x \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ m/s}$$

معدل انزلاق طرفه العلوي تساوي  $\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ m/s}$

2015 4 رحافة

سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل  $\frac{1}{5} \text{ m/s}$  جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي  $\frac{\pi}{3}$

سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل  $2 \text{ m/s}$  جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي  $\frac{\pi}{4}$ .

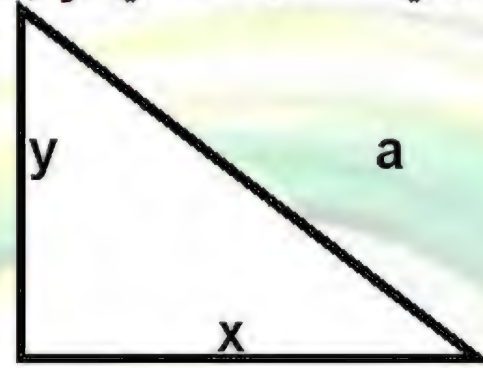
2016 دور 2

**الحل :-** نفرض طولي الضلعين القائمي  $x, y$  وليكن طول الوتر  $a$  (عددا ثابتا)

$$a^2 = x^2 + y^2$$

$$0 = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \dots\dots(1)$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{y}{x} \Rightarrow 1 = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \dots\dots(2)$$



$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$

$$0 = 2x(2) + 2x \frac{dy}{dt} \Rightarrow 2x \frac{dy}{dt} = -4x \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m/s}$$

معدل انزلاق طرفه العلوي تساوي  $2 \text{ m/s}$

التقييم | السؤال منهجي جدا ضمن تمارين الكتاب وتم تغيير الزاوية فقط ويعد من الاسئلة المتوسطة الصعوبة وقد ورد وزاريا في ثلاث سنوات اثنان منها نصا وفي الثالثة تغيير سرعة حركة طرفه السفلي مع الابقاء على الزاوية نفسها.



لتكن M نقطة متحركة على منحنى القطع المكافئ  $y^2 = 4x$  بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (7,0) يساوي 0.2 unit/s جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون  $x = 4$ .

2013 دور 1 خارج

sol: let  $M = (x, y)$ ,  $N = (7, 0)$ ,  $S = MN$  طول

$$D = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow s = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}, \quad y^2 = 4x \text{ بالتعويض}$$

$$D = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x} = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}} \frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = \frac{8-10}{2\sqrt{16-40+49}} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = -\frac{2}{10} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1 \text{ unit/s}$$

لتكن M نقطة متحركة على منحنى القطع المكافئ  $x^2 = 4y$  بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (7,0) يساوي 0.2 unit/s جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M عندما يكون  $y = 4$ .

2016 تمهيدي

يمكن ملاحظة العلاقة العددية بين هذا السؤال والسؤال الوزاري السابق

لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ  $y = x^2$  جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة  $(0, \frac{3}{2})$  يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M.

2012 دور 2

sol: let  $M = (x, y)$ ,  $N = (0, \frac{3}{2})$ ,  $S = MN$  طول,  $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt}$

$$s = \sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{3}{2})^2} \Rightarrow s = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}, \quad y = x^2 \text{ بالتعويض}$$

$$s = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \Rightarrow s = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$$

$$2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3y - 3 \text{ بتربيع الطرفين}$$

$$4(y^2 - 2y + \frac{9}{4}) = 9y^2 - 18y + 9 \Rightarrow [4y^2 - 8y + 9 = 9y^2 - 18y + 9]$$

$$5y^2 - 10y = 0 \Rightarrow 5y(y - 2) = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ يهمل OR } y = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

$$M = \{(\sqrt{2}, 2), (-\sqrt{2}, 2)\} \text{ مجموعة الحل}$$

2014 دور 1



لتكن  $M$  نقطة تتحرك على القطع المكافئ  $y = x^2$  جد احداثي النقطة  $M$  عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة  $(0, \frac{3}{2})$  يساوي ثلث المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة  $M$ .

**تنبيه** || **لعله في النية (على اعتبار ان الاعمال بالنيات) ان تكون هذه الثلث هي ثلثي ويكون الحل كسابقه**  
**اما اذا كانت النية حقيقية هي ثلث فيكون الحل عجيبا فريبا كما يلي :-**

**sol :** let  $M = (x, y)$ ,  $N = (0, \frac{3}{2})$ ,  $S = MN$  طول,  $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{3} \cdot \frac{dy}{dt}$

$$s = \sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{3}{2})^2} \Rightarrow s = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}, \quad y = x^2 \text{ بالتعويض}$$

$$s = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \Rightarrow s = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$$

$$\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3y - 3 \text{ بتربيع الطرفين}$$

$$(y^2 - 2y + \frac{9}{4}) = 9y^2 - 18y + 9 \Rightarrow$$

$$[8y^2 - 16y + \frac{27}{4} = 0] \div 8 \Rightarrow [y^2 - 2y + \frac{27}{32} = 0] \Rightarrow y^2 - 2y = -\frac{27}{32}$$

$$y^2 - 2y + 1 = -\frac{27}{32} + 1 \Rightarrow (y-1)^2 = \frac{5}{32} \Rightarrow y-1 = \pm \sqrt{\frac{5}{32}} \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}$$

$$y = x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}} \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}}$$

مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه الى الاسفل ارتفاعه يساوي  $24\text{cm}$  وطول قطر

قاعدته  $16\text{cm}$  يصب فيه سائل بمعدل  $5\text{ cm}^3/\text{s}$  بينما يتسرب منه السائل بمعدل

2014 دور 4 انبار

$1\text{ cm}^3/\text{s}$  جد معدل تغير نصف قطر السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر السائل  $4\text{cm}$ .

**sol :** let  $V =$  ارتفاع الماء  $h$ , نصف قطر قاعدة الماء  $x$ , حجم الماء المخروطي الشكل

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 h$$

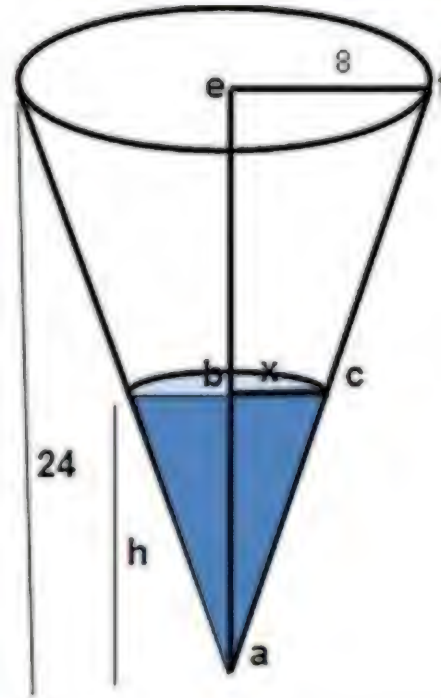
$$\tan \theta = \frac{8}{24} = \frac{x}{h} \quad \text{او من تشابه المثلثين } abc, aef$$

$$8h = 24x \Rightarrow h = 3x$$

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 (3x) \Rightarrow V = \pi x^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3\pi x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$4 = 3\pi (4)^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{4}{48\pi} = \frac{1}{12\pi} \text{ cm/s}$$



$$\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$x = 4, \frac{dx}{dt} = ?$$



2014 نارحين

جد مجموعة النقط التى تنتمى الى الدائرة  $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$  والذى يكون عندها المعدل الزمنى لتغير  $x$  مساويا للمعدل الزمنى لتغير  $y$  بالنسبة للزمن  $t$ .

**sol :** let  $M(x, y)$  ;  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} + 4 \frac{dx}{dt} - 8 \frac{dy}{dt} = 0$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 4 \frac{dx}{dt} = 8 \frac{dy}{dt} - 2y \frac{dy}{dt} \Rightarrow (2x + 4) \frac{dx}{dt} = (8 - 2y) \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow [(2x + 4) = (8 - 2y)] \div 2 \Rightarrow x + 2 = 4 - y \Rightarrow y = 2 - x \quad \dots\dots (1)$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108 \quad \dots\dots (2)$$

$$x^2 + (2 - x)^2 + 4x - 8(2 - x) - 108 = 0$$

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 + 4x - 16 + 8x - 108 = 0$$

$$2x^2 + 8x - 120 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0 \Rightarrow (x + 10)(x - 6) = 0$$

$$x = -10 \Rightarrow y = 2 + 10 = 12 \quad \text{OR} \quad x = 6 \Rightarrow y = 2 - 6 = -4$$

$$M = \{(-10, 12), (6, -4)\}$$



متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة امثال طول قاعدته يتمدد بالحرارة جد  
معدل تغير حجمها ومساحتها السطحية في اللحظة التي يكون فيها طول القاعدة 8m  
ومعدل تغير طول القاعدة  $\frac{1}{4} \text{ m/s}$ .

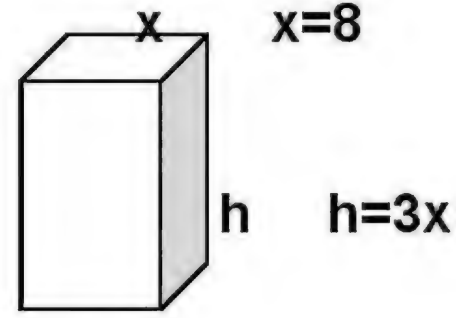
2016 دور 1 في

الحل || نفرض ان طول القاعدة = x ، والارتفاع = h ، حيث ان  $h = 3x$

حجم متوازي المستطيلات  $V = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$   
المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات  $A = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع} + 2 \times \text{مساحة القاعدة}$

$$V = x^2 h \Rightarrow V = x^2(3x) \Rightarrow V = 3x^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 9x^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 9(8)^2 \left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 144 \text{ m}^3/\text{s}$$



$$A = 4x h + 2x^2 \Rightarrow A = 12x^2 + 2x^2 \Rightarrow A = 14x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{dA}{dt} = 28x \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 28(8) \left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 56 \text{ m}^2/\text{s}$$

تلميح || بما ان المعطيات في السؤال بدلالة x نقوم بتوحيد المتغيرات في القانون بدلالة x ، ولو كانت المعطيات بدلالة h فنقوم بتوحيدها بدلالة h ايضا حيث ان اذا كانت  $h = 3x$  فيكون عندها  $x = \frac{h}{3}$  ارجو الانتباه

تأكيد || يمكن ان يحل السؤال بطريقة اخرى وذلك باعتبار العلاقة  $h = 3x$  علاقة اساسية ويتم اشتقاقها لينتج ان  $\frac{dh}{dt} = 3 \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{4}$  ،  $x = 8 \rightarrow h = 24$  ثم نشتق القانون العام  $V = x^2 h$  حسب مشتقة

حاصل ضرب دالتين ونعوض كلا بمكانه لينتج نفس الناتج  $\frac{dA}{dt} = 56 \text{ m}^2/\text{s}$  .... جرب بنفسك ....



## مبرهني رول والقيمة المتوسطة والتقريب

بين ان الدالة  $f(x) = (x - 1)^4$  تحقق مبرهنة رول على الفترة  $x \in [-1, 3]$  ثم

جد قيمة  $c$  حيث ان  $f'(c) = 0$

2011 دور 1

الحل :-

(أ) الدالة مستمرة على الفترة  $[-1, 3]$  لانها كثيرة حدود

(ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $(-1, 3)$  لانها كثيرة حدود .

$$\rightarrow f(3) = f(-1) \Rightarrow f(3) = (3 - 1)^4 = 16, f(-1) = (-1 - 1)^4 = 16$$

$$f'(x) = 4(x - 1)^3$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 4(c - 1)^3 = 0 \Rightarrow c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1 \in (-1, 3)$$

ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة  $f(x) = x^2 - x + 1$  على الفترة  $[-1, 2]$  وان

تحققت جد قيمة  $c$

2012 دور 1

الحل :-

(1) الدالة مستمرة على الفترة  $[-1, 2]$  لانها كثيرة حدود

(2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $(-1, 2)$  لانها كثيرة حدود .

(3) يوجد على الاقل قيمة واحدة  $c \in (a, b)$  وتحقق  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$f(2) = 4 - 2 + 1 = 3, f(-1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{3 - 3}{3} = 0 \quad \text{ميل الوتر} \quad f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(c) = 2c - 1$$

$$\Rightarrow 2c - 1 = 0 \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \in (-1, 2) \quad \text{ميل المماس} = \text{ميل الوتر}$$

باستخدام مبرهنة رول جد قيمة  $c$  للدالة  $f(x) = x^4 + 2x^2$  حيث  $x \in [-2, 2]$

2013 دور 2

الحل :-

(أ) الدالة مستمرة على الفترة  $[-2, 2]$  لانها كثيرة حدود

(ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $(-2, 2)$  لانها كثيرة حدود .

$$\rightarrow f(-2) = f(2) \Rightarrow f(-2) = 16 + 8 = 24, f(2) = 16 + 8 = 24$$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 4c^3 + 4c = 0 \Rightarrow 4c(c^2 + 1) = 0 \Rightarrow 4c = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-2, 2)$$

وهذا غير ممكن لانه مجموع مربعين  $c^2 + 1 = 0$  or



ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

2012 خارج القطر

$$f(x) = 2x + \frac{2}{x}, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

الحل :- (أ) الدالة مستمرة على الفترة  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$  لان الفترة تقع ضمن مجالها  $R \setminus \{0\}$ 

$$\text{let } a \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \Rightarrow f(a) = 2a + \frac{2}{a} \in R \Rightarrow \text{الدالة معرفة}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2a + \frac{2}{a} \in R \Rightarrow \text{الغاية موجودة}$$

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow \text{الدالة مستمرة}$$

(ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$  لان الفترة تقع ضمن مجالها  $R \setminus \{0\}$ 

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 4 = 5, \quad f(2) = 4 + 1 = 5 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) \quad (\text{ج})$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2}, \quad f'(c) = 0$$

$$2 - \frac{2}{c^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{2}{c^2} \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) \text{ OR } c = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

ابحث تحقق مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

2013 خارج القطر

$$f(x) = 9x + 3x^2 - x^3 : x \in [-1, 1]$$

الحل :- (أ) الدالة مستمرة على الفترة  $[-1, 1]$  لانها كثيرة حدود(ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $(-1, 1)$  لانها كثيرة حدود .

$$f(1) = 9 + 3 - 1 = 11, \quad f(-1) = -9 + 3 + 1 = -5 \quad (\text{ج})$$

نظرية رول غير متحققة لعدم تحقق الشرط الثالث  $\Rightarrow f(1) \neq f(-1)$ ابحث تحقق مبرهنة رول على الفترة  $[-1, b]$  فإذا كانت

2014 خارج القطر

$$f(x) = ax^2 - 4x + 5, \quad c = 2, \quad c \in (-1, b), \quad a, b \in R \text{ فجد قيمتي } a, b$$

الحل | بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول فان  $f(-1) = f(b)$ 

$$f(-1) = a + 4 + 5 = a + 9, \quad f(b) = ab^2 - 4b + 5$$

$$ab^2 - 4b + 5 = a + 9 \quad \dots\dots (1)$$

$$f'(x) = 2ax - 4 \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow 2ac - 4 = 0 \Rightarrow 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ (in 1)}$$

$$b^2 - 4b + 5 = 1 + 9 \Rightarrow b^2 - 4b - 5 = 0 \Rightarrow (b - 5)(b + 1) = 0$$

تهمل  $b = 5$  OR  $b = -1$



هل ان  $f(x)$  تحقق مبرهنة رول على الفترة  $[-1, 1]$  ؟ وان تحققت جد قيمة  $c$

حيث ان  $h(x) = x^3 - x$

الدالة مستمرة على الفترة  $[-1, 1]$  لانها كثيرة حدود

(الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $(-1, 1)$  لانها كثيرة حدود .

$$h(1) = 1 - 1 = 0, h(-1) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow h(1) = h(-1) \quad (\text{جـ})$$

$$h'(x) = 3x^2 - 1$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1) \quad \text{OR} \quad c = -\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1)$$

2014 دور 2

2016 دور 2 خارج

هل بالامكان تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة  $h(x) = x^2 - 4x + 5$

ضمن الفترة  $[-1, 5]$

2014 دور 4 انبار

الحل :- (1) الدالة مستمرة على الفترة  $[-1, 5]$  لانها كثيرة حدود .

(2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $(-1, 5)$  لانها كثيرة حدود .

(3) يوجد على الاقل قيمة واحدة  $c \in (a, b)$  وتحقق  $h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}$

$$h'(x) = 2x - 4 \Rightarrow h'(c) = 2c - 4 \quad \text{ميل المماس}$$

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{h(5) - h(-1)}{5 - (-1)} = \frac{(25 - 20 + 5) - (1 + 4 + 5)}{6} = \frac{(10) - (10)}{6} = 0 \quad \text{ميل الوتر}$$

$$2c - 4 = 0 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \in (-1, 5)$$

برهن ان الدالة  $f(x) = x^2 - 6x + 4$  تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة وجد قيمة  $c$  على  $[-1, 7]$

2014 دور 1

الحل :- (1) الدالة مستمرة على الفترة  $[-1, 7]$  لانها كثيرة حدود .

(2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $(-1, 7)$  لانها كثيرة حدود .

(3) يوجد على الاقل قيمة واحدة  $c \in (a, b)$  وتحقق  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'(c) = 2c - 6 \quad \text{ميل المماس}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(7) - f(-1)}{7 - (-1)} = \frac{(49 - 42 + 4) - (1 + 6 + 4)}{8} = \frac{(11) - (11)}{8} = 0 \quad \text{ميل الوتر}$$

$$\text{ميل المماس} = \text{ميل الوتر}$$

$$2c - 6 = 0 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \in (-1, 7)$$

2015 دور 1



إذا كانت  $f: [0, b] \Rightarrow \mathbb{R}$  ،  $f(x) = x^3 - 4x^2$  وكانت  $f$  تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

2014 تمهيدي في

2016 دور اول

عند  $c = \frac{2}{3}$  ، جد قيمة  $b$  .

**الحل :-** بما ان الدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة فانها مستمرة وقابلة للاشتقاق بالاضافة الى انها تحقق وجود

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ وتحقق } c \in (a, b) \text{ قيمة واحدة على الاقل حيث}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 8c \Rightarrow f'(\frac{2}{3}) = 3(\frac{2}{3})^2 - 8(\frac{2}{3}) = -4 \text{ ميل المماس}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{(b^3 - 4b^2) - (0)}{b} = \frac{b^3 - 4b^2}{b} \text{ ميل الوتر}$$

ميل المماس = ميل الوتر

$$\frac{b^3 - 4b^2}{b} = -4 \Rightarrow b^3 - 4b^2 = -4b \Rightarrow b^3 - 4b^2 + 4b = 0$$

$$b(b^2 - 4b + 4) = 0 \Rightarrow b(b - 2)^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ يهمل OR } (b - 2)^2 = 0 \Rightarrow b = 2$$

اثبت ان الدالة  $f(x) = (2 - x)^2$  حيث  $x \in [0, 4]$  تحقق مبرهنة رول ثم جد قيمة  $(c)$  .

2015 تمهيدي

**الحل :-** (أ) الدالة مستمرة على الفترة  $[0, 4]$  لانها كثيرة حدود

(ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $(0, 4)$  لانها كثيرة حدود .

$$f(0) = (2 - 0)^2 = 4 , f(4) = (2 - 4)^2 = 4 \Rightarrow f(0) = f(4) \text{ (ج)}$$

$$f'(x) = 2(2 - x)(-1) = -4 + 2x$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow -4 + 2c = 0 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \in (0, 4)$$

مربع مساحته  $50 \text{ cm}^2$  جد طول ضلعه بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات .

1997 دور 2

$$A = m^2 \Rightarrow 50 = m^2 \Rightarrow m = \sqrt{50} \text{ (طول الضلع)}^2 \text{ :- مساحة المربع}$$

$$m(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{let } a = 49 , b = 50 , h = b - a = 50 - 49 = 1 , m(a) = \sqrt{49} = 7$$

$$\Rightarrow m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{14} = 0.071$$

$$m(a + h) \approx m(a) + h.m'(a) \Rightarrow m(48) \approx 7 + (1)(0.071) \approx 7 + 0.071 \approx 7.071 \text{ cm}$$



لتكن  $f(x) = \sqrt[3]{2x+6}$  جد  $f(1.02)$  بصورة تقريبية .

1998 دور 2

2015 دور 4 رياضة

**sol :**  $f(x) = \sqrt[3]{2x+6} = (2x+6)^{\frac{1}{3}}$

let  $a = 1$  ,  $b = 1.02$  ,  $h = b - a = 0.02$  ,  $f(a) = \sqrt[3]{8} = 2$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(2x+6)^{-\frac{2}{3}}(2) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2a+6)^2}} = \frac{2}{3(4)} = \frac{1}{6} = 0.16$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(1.02) \approx 2 + (0.0032) \approx 2.0032$$

مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي نصف قطر قاعدته جد القيمة التقريبية لتغير حجمه اذا تغير ارتفاعه من 4 cm الى 4.01 cm باستخدام مفهوم التفاضلات .

2000 دور 1

الحل | نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط ( r ) والارتفاع y حيث ان  $y = r$ 

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 y \Rightarrow v = \frac{\pi}{3} y^2 y \Rightarrow v_{(y)} = \frac{\pi}{3} y^3$$

let  $a = 4$  ,  $b = 4.01$  ,  $h = b - a = 0.01$

$$v'_{(y)} = \pi y^2 \Rightarrow v'_{(a)} = \pi a^2 = \pi (4)^2 = 16\pi$$

$$h.v'(a) \approx (16\pi)(0.01) \approx 0.16\pi \text{ cm}^3$$
 القيمة التقريبية لتغير الحجم

جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية  $\sqrt[3]{126}$ 

2001 دور 2

**sol :**  $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

let  $a = 125$  ,  $b = 126$  ,  $h = b - a = 1$  ,  $f(a) = \sqrt[3]{125} = 5$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75} = 0.013$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(126) \approx 5 + (0.013)(1) \approx 5.013$$



لتكن  $f(x) = \sqrt{4x+5}$  جد  $f(1.001)$  بصورة تقريبية .

2002 دور 2

$$f(x) = \sqrt{4x+5}$$

$$\text{let } a = 1, b = 1.001, h = b - a = 0.001, f(a) = \sqrt{4+5} = 3$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+5}} = \frac{2}{\sqrt{4x+5}} \Rightarrow f'(a) = \frac{2}{\sqrt{4a+5}} = \frac{2}{\sqrt{4+5}} = \frac{2}{3} = 0.6$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(1.001) \approx 3 + (0.001)(0.6) \approx 3.0006$$

جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية  $\sqrt{99}$ 

2003 دور 1

$$\text{sol : } f(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{let } a = 100, b = 99, h = b - a = 99 - 100 = -1, f(a) = \sqrt{100} = 10$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(99) \approx 10 + (-1)(0.05) \approx 9.95$$

لتكن  $f(x) = \sqrt[3]{3x+5}$  جد  $f(1.001)$  بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات.

2004 دور 1

$$\text{sol : } f(x) = \sqrt[3]{3x+5} = (3x+5)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{let } a = 1, b = 1.001, h = b - a = 0.001, f(a) = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(3x+5)^{-\frac{2}{3}}(3) = \frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+5)^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{\sqrt[3]{(3a+5)^2}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(1.001) \approx 2 + (0.00025) \approx 2.00025$$

مربع مساحته  $48 \text{ cm}^2$  جد بصورة تقريبية طول ضلعه .

2013 دور 1

$$\text{حل :- مساحة المربع} = (\text{طول الضلع})^2 \Rightarrow A = m^2 \Rightarrow 48 = m^2 \Rightarrow m = \sqrt{48}$$

$$m(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{let } a = 49, b = 48, h = b - a = 48 - 49 = -1, m(a) = \sqrt{49} = 7$$

$$\Rightarrow m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{14} = 0.071$$

$$m(a+h) \approx m(a) + h.m'(a) \Rightarrow m(48) \approx 7 + (-1)(0.071) \approx 7 - 0.071 \approx 6.929 \text{ cm}$$



باستخدام مفهوم التفاضلات جد حجم كرة طول نصف قطرها  $2.99 \text{ cm}$  بصورة تقريبية .

الحل :- حجم الكرة  $= \frac{4\pi}{3} (\text{نصف القطر})^3$

2005 دور 1

$$V = \frac{4\pi}{3} (2.99)^3$$

$$V(x) = \frac{4\pi}{3} x^3$$

$$a = 3, b = 2.99, h = b - a = -0.01, v(a) = \frac{4\pi}{3} (3)^3 = 36\pi$$

$$V'(x) = 4\pi x^2 \Rightarrow V'(a) = 4\pi a^2 = 4\pi (3)^2 = 36\pi$$

$$v(a+h) \approx v(a) + h.v'(a) \approx 36\pi + (-0.01)(36\pi) \approx 35.64\pi \text{ cm}^3$$

جد حجم كرة طول نصف قطرها  $3.001 \text{ cm}$  بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات

الحل :- حجم الكرة  $= \frac{4\pi}{3} (\text{نصف القطر})^3$

2006 تمهيدي

2016 دور 2

$$V = \frac{4\pi}{3} (3.001)^3$$

$$V(x) = \frac{4\pi}{3} x^3$$

$$a = 3, b = 3.001, h = b - a = 0.001, v(a) = \frac{4\pi}{3} (3)^3 = 36\pi$$

$$V'(x) = 4\pi x^2 \Rightarrow V'(a) = 4\pi a^2 = 4\pi (3)^2 = 36\pi$$

$$v(a+h) \approx v(a) + h.v'(a) \approx 36\pi + (0.001)(36\pi) \approx 36.036\pi \text{ cm}^3$$

ملاحظة || يمكن للطالب ان يستخرج  $(3.001)^3$  عن طريق التعامل مع الدالة  $f(x) = x^3$  لينتج ان

$f(a+h) = 27.027$  ومن ثم يكتب قانون حجم الكرة ويكون الجواب النهائي له

$v = \frac{4\pi}{3} (27.027) = 36.036\pi$  ويفضل الابتعاد عن هذا النوع من الحلول رغم صحتها العلمية .

تكن  $f(x) = \sqrt{3x+1}$  جد  $f(1.001)$  بصورة تقريبية .

2005 دور 2

$$f(x) = \sqrt{3x+1}$$

$$\text{let } a = 1, b = 1.001, h = b - a = 0.001, f(a) = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \Rightarrow f'(a) = \frac{3}{2\sqrt{3a+1}} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(1.001) \approx 2 + (0.001)(0.75) \approx 2.00075$$



جد التقريبية للعدد  $\sqrt[3]{26}$  باستخدام التفاضلات .

2008 دور 2

2016 تمهيدي

$$\text{sol : } f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{let } a = 27, b = 26, h = b - a = -1, f(a) = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} = 0.037$$

$$f(a + h) \approx f(a) + h \cdot f'(a) \Rightarrow f(26) \approx 3 + (0.037)(-1) \approx 3 - 0.037 \approx 2.963$$

باستخدام التفاضلات جد القيمة التقريبية للعدد  $\sqrt[3]{-9}$ 

2006 دور 2

$$\text{sol : } f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{let } a = -8, b = -9, h = b - a = -9 + 8 = -1, f(a) = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$$

$$f(a + h) \approx f(a) + h \cdot f'(a) \Rightarrow f(-9) \approx -2 + (0.083)(-1) \approx -2 - 0.083 \approx -2.083$$

جد بصورة تقريبية وباستخدام مفهوم التفاضلات طول ضلع مربع مساحته  $101 \text{ cm}^2$ 

2007 دور 1

$$\text{حل :- مساحة المربع} = (\text{طول الضلع})^2 \Rightarrow A = m^2 \Rightarrow 101 = m^2 \Rightarrow m = \sqrt{101}$$

$$m(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{let } a = 100, b = 101, h = b - a = 101 - 100 = 1, m(a) = \sqrt{100} = 10$$

$$\Rightarrow m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$m(a + h) \approx m(a) + h \cdot m'(a) \Rightarrow m(101) \approx 10 + (1)(0.05) \approx 10 + 0.05 \approx 10.05 \text{ cm}$$



جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات  $\sqrt{143}$ 

2008 تمهيدي

sol :  $f(x) = \sqrt{x}$

let  $a = 144$  ,  $b = 143$  ,  $h = b - a = 143 - 144 = -1$  ,  $f(a) = \sqrt{144} = 12$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{144}} = \frac{1}{24} \approx 0.04$$

$$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(143) \approx 12 + (-1)(0.04) \approx 11.96$$

جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات  $\sqrt{0.98}$ 

2008 حور 1

sol :  $f(x) = \sqrt{x}$

let  $a = 1$  ,  $b = 0.98$  ,  $h = b - a = -0.02$  ,  $f(a) = \sqrt{1} = 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(0.98) \approx 1 + (-0.02)(0.5) \approx 1 - 0.01 \approx 0.99$$

جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات  $\sqrt[4]{13.86}$ 

2008 حور 2 خارج

sol :  $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$

let  $a = 16$  ,  $b = 13.86$  ,  $h = b - a = -2.14$  ,  $f(a) = \sqrt[4]{16} = 2$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32} \approx 0.031$$

$$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(13.86) \approx 2 + (-2.14)(0.031) \approx 1.9347$$

تأكيد || ان h في هذا السؤال كبيرة جدا قياسا بأصل العدد وعليه ستكون هذه النتيجة بعيدة بعض الشيء عن الواقع



جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات  $\sqrt[3]{25.97}$ 

2013 دور 1

**sol :**  $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

let  $a = 27$  ,  $b = 25.97$  ,  $h = b - a = -1.03$  ,  $f(a) = \sqrt[3]{27} = 3$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} \approx 0.04$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(25.97) \approx 3 + (-0.0412) \approx 2.9588$

جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات  $\sqrt{15-1}$ 

2009 تمهيدي

**sol :**  $f(x) = \sqrt{x-1} = x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

let  $a = 16$  ,  $b = 15$  ,  $h = b - a = -1$  ,  $f(a) = \frac{1}{\sqrt{16}} = 0.25$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow f'(a) = \frac{-1}{2\sqrt{a^3}} = \frac{-1}{2\sqrt{16^3}} = \frac{-1}{128} \approx -0.007$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(15) \approx 0.25 + (-0.007) \approx 0.243$

جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات  $\sqrt[4]{0.008}$ 

2009 دور 1

**sol :**  $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$

let  $a = 0.0081$  ,  $b = 0.0080$  ,  $h = b - a = -0.0001$  ,  $f(a) = \sqrt[4]{0.0081} = 0.3$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{(0.0081)^3}} = \frac{1}{0.108} \approx 9$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(0.008) \approx 0.3 + (-0.0009) \approx 0.2991$



مكعب حجمه  $124 \text{ cm}^3$  جد وباستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية طول ضلعه

الحل :- حجم المكعب = (طول الضلع)<sup>3</sup>

2010 تمهيدي

$$V(m) = m^3 \Rightarrow 124 = m^3 \Rightarrow m = \sqrt[3]{124}$$

$$m(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{let } a = 125, b = 124, h = b - a = -1, m(a) = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$\Rightarrow m'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75} = 0.013$$

$$m(a + h) = m(a) + h \cdot m'(a) \Rightarrow m(124) \approx 5 + (0.013)(-1) \approx 5 - 0.013 \approx 4.987$$

استخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية  $\sqrt[3]{7.8}$

2011 دور 1

$$\text{sol : } f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{let } a = 8, b = 7.8, h = b - a = 7.8 - 8 = -0.2, f(a) = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$$

$$f(a + h) \approx f(a) + h \cdot f'(a) \Rightarrow f(7.8) \approx 2 + (0.083)(-0.2) \approx 2 - 0.0166 \approx 1.9834$$

باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية  $\sqrt[3]{7.9}$

2015 مارسين 1 . 2015 دور 3

استخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية  $\sqrt[3]{63}$

2012 تمهيدي

$$\text{sol : } f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{let } a = 64, b = 63, h = b - a = 63 - 64 = -1, f(a) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{48} = 0.0208$$

$$f(a + h) \approx f(a) + h \cdot f'(a) \Rightarrow f(63) \approx 4 + (0.0208)(-1) \approx 4 - 0.0208 \approx 3.9792$$



2012 دور 2

باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية  $\sqrt{\frac{1}{2}}$

**sol :**  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

let  $a = 0.49$  ,  $b = 0.50$  ,  $h = b - a = 0.50 - 0.49 = 0.01$  ,  $f(a) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{1.4} = 0.7142$

$f(a + h) = f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(0.5) \approx 0.7 + (0.7142)(0.01) \approx 0.7 + 0.0071 \approx 0.7071$

إذا علمت ان  $f(x) = \sqrt[5]{31x + 1}$  جد بصورة تقريبية  $f(1.01)$  باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة .

2013 دور 1

**sol :**  $f(x) = \sqrt[5]{31x + 1} = (31x + 1)^{\frac{1}{5}}$

$a = 1$  ,  $b = 1.01$  ,  $h = b - a = 0.01$  ,  $f(a) = \sqrt[5]{32} = 2$

$f'(x) = \frac{1}{5} (31x + 1)^{-\frac{4}{5}} (31) = \frac{31}{5\sqrt[5]{(31x+1)^4}}$

$f'(a) = \frac{31}{5\sqrt[5]{(31+1)^4}} = \frac{31}{80} = 0.3875 \approx 0.39$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(1.01) \approx 2 + (0.0039) \approx 2.0039$

مخروط دائري قائم حجمه  $210\pi \text{ cm}^3$  جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته إذا كان ارتفاعه  $10\text{cm}$  .

2013 دور 2

1999 دور 1

الحل \ نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط ( r )

$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \Rightarrow 210\pi = \frac{\pi}{3} r^2 (10) \Rightarrow r^2 = 63 \Rightarrow r = \sqrt{63}$

$r(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

let  $a = 64$  ,  $b = 63$  ,  $h = b - a = 63 - 64 = -1$  ,  $r(a) = \sqrt{64} = 8$

$\Rightarrow r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow r'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{16} = 0.0625$

$r(a + h) \approx r(a) + h.r'(a) \Rightarrow r(63) \approx 8 - (0.0625) \approx 7.9375$

Mob: 07902162268

79

اعدادية الكاظمية للبنين



2014 تمهيدي

2011 خارج القطر

جد وبصورة تقريبيه باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطه  $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ 

$$\text{sol : } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\text{let } a = 8, b = 9, h = b - a = 9 - 8 = 1, f(a) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = 0.5$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}} \Rightarrow f'(a) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{8^4}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{8^4}} = \frac{-1}{48} = -0.0208$$

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a) \Rightarrow f(9) \approx 0.5 + (-0.0208)(1) \approx 0.5 - 0.0208 \approx 0.4792$$

رّة نصف قطرها 6cm طليت بطلاء سمكه 0.1cm جد كمية الطلاء بصورة تقريبيه باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطه .

2014 دور 1

الحل :- حجم الكرة  $= \frac{4\pi}{3} (\text{نصف القطر})^3$

$$V = \frac{4\pi}{3} (6.1)^3$$

$$V(x) = \frac{4\pi}{3} x^3$$

$$a = 6, b = 6.1, h = b - a = 6.1 - 6 = 0.1$$

$$V'(x) = 4\pi x^2 \Rightarrow V'(a) = 4\pi a^2 = 4\pi (6)^2 = 144\pi$$

$$h \cdot v'(a) = (0.1)(144\pi) = 14.4\pi \text{ cm}^3 \text{ (كمية الطلاء)}$$

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطه جد حجم مخروط دائري قائم بصورة تقريبيه ، علما طول قطر قاعدته يساوي ارتفاعه ويساوي 3.99 cm

2015 دور 1

الحل :- حجم المخروط  $= \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{ارتفاع} = \frac{\pi}{3} (\text{نصف القطر})^2 \times \text{ارتفاع}$

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 y, \because y = 2r \Rightarrow r = \frac{1}{2}y \Rightarrow v(y) = \frac{\pi}{12} y^3$$

$$a = 4, b = 3.99, h = b - a = 3.99 - 4 = -0.01, v(a) = \frac{\pi}{12} (4)^3 = \frac{64}{12} \pi = 5.33\pi$$

$$v'(y) = \frac{\pi}{4} y^2 \Rightarrow v'(a) = \frac{\pi}{4} a^2 = \frac{\pi}{4} (4)^2 = 4\pi$$

$$v(a + h) = v(a) + h \cdot v'(a) \Rightarrow v(3.99) = 5.3\pi + (4\pi)(-0.01) \\ = 5.33\pi - 0.04\pi = 5.29\pi \text{ cm}^3$$

تأكيد || بما ان الارتفاع يساوي طول القطر فإن طول نصف القطر يساوي 1.995 ويمكن ان نجعل القانون بدلالة

$$\text{نصف القطر بالشكل التالي } v = \frac{\pi}{3} r^2 (2r) \Rightarrow v = \frac{2\pi}{3} r^3 \Rightarrow v = \frac{\pi}{3} r^2 y \text{ عندها ستكون قيمة } a = 2$$

Mob: 07902162268

80

اعدادىة الكاظمية للبنين



2015 خارج 1

بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية  $(1.01)^5 + 3(1.01)^{\frac{1}{3}} + 2$

**sol :**  $f(x) = x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 2 = x^5 + 3x^{\frac{1}{3}} + 2$

let  $a = 1$  ,  $b = 1.01$  ,  $h = b - a = 0.01$  ,  $f(a) = 1 + 3 + 2 = 6$

$\Rightarrow f'(x) = 5x^4 + \frac{1}{3\sqrt{x^2}} \Rightarrow f'(a) = 5a^4 + \frac{1}{3\sqrt{a^2}} = 5 + 1 = 6$

$f(a + h) \approx f(a) + h.f'(a) \Rightarrow f(1.01) \approx 6 + (0.01)(6) \approx 6 + 0.06 \approx 6.06$

2015 دور 2

إذا كان  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  جد مقدار التغير التقريبي للدالة إذا تغيرت  $x$  من 4 الى 4.01

**sol :**  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

let  $a = 4$  ,  $b = 4.01$  ,  $h = b - a = 4.01 - 4 = 0.01$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow f'(a) = \frac{-1}{2\sqrt{64}} = \frac{-1}{16} = -0.0625$

$h.f'(a) \approx (0.01) \cdot (-0.0625) \approx -0.000625$  مقدار التغير التقريبي

2015 دور 2 خارج

لتكن  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  فإذا تغيرت  $x$  من 125 الى 125.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة ؟

**sol :**  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

let  $a = 125$  ,  $b = 125.06$  ,  $h = b - a = 125.06 - 125 = 0.06$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(a) = \frac{2}{3\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{15} = 0.1333$

$h.f'(a) \approx (0.06) \cdot (0.1333) \approx 0.008$  مقدار التغير التقريبي



2016 دور 1 ج

جد بصورة تقريبيه باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة  $\sqrt{80} - \sqrt[4]{80}$ 

$$\text{sol : } f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{let } a = 81, b = 80, h = b - a = -1, f(a) = \sqrt{81} - \sqrt[4]{81} = 9 - 3 = 6$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{81}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{18} - \frac{1}{108} = \frac{5}{108} \approx 0.046$$

$$f(a + h) \approx f(a) + h \cdot f'(a) \Rightarrow f(81) \approx 6 + (-0.046) \approx 5.954$$

التقييم || السؤال ذو فكرة منهجية رغم عدم وجوده بالنص في الكتاب المنهجي وهو مقارب لسؤال التمرين  $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$  ومقارب أكثر من مثال الكتاب  $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$  وهذه الأفكار المركبة لم ترد في الاسئلة الوزارية السابقة .

تأكيد || لو كان السؤال السابق بالصورة  $\sqrt{26} + \sqrt[3]{26}$  فلا يوجد عدد قريب من العدد 26 له جذر تربيعي وتكعيبي في نفس الوقت وعليه يجب حل كل جذر لوحده ثم نجمع النتائج النهائية ارجو الانتباه . علما ان السؤال السابق يمكن حله بنفس هذه الطريقة المشار اليها لكن الحل بجزء واحد يكون افضل .

Mob: 07902162268

82

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



## حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الثالث ( اسئلة الثوابت ورسم الدوال )

1997 دور 1

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

sol: ① اوسع مجال للدالة  $R$

② المحاذي الافقي  $y = 1$  ، المحاذي العمودي (لا يوجد)

③ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = -1, \text{ if } y = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين  $(0, -1), (1, 0), (-1, 0)$

④ التناظر

$$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x) \Rightarrow \text{المنحنى متناظر حول محور الصادات}$$

⑤ النهايات

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1) \text{ نقطة حرجة}$$

$$x < 0 \quad x > 0$$

----- (0) ++++++ اشارة المشتقة الاولى

{  $x : x \in R ; x > 0$  } الدالة متزايدة بالفترة

{  $x : x \in R ; x < 0$  } الدالة متناقصة بالفترة

نقطة نهاية صغرى محلية  $(0, -1)$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot 4 - 4x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4(x^2+1)^2 - 16x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)[4(x^2+1) - 16x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{4x^2+4-16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

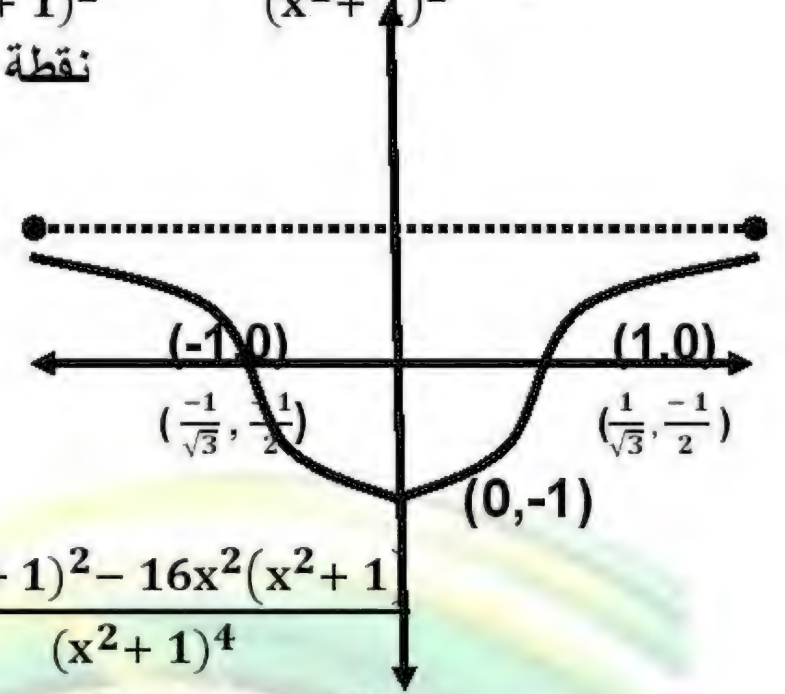
$$y = \frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right) \text{ نقاط انقلاب مرشحة}$$

-----  $(-\frac{1}{\sqrt{3}})$  ++++++  $(\frac{1}{\sqrt{3}})$  ----- اشارة المشتقة الثانية

{  $x : x \in R ; x > \frac{1}{\sqrt{3}}$  }, {  $x : x \in R ; x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$  } الدالة محدبة بالفترتين

{  $x : x \in R ; x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  } الدالة مقعرة بالفترة

نقاط انقلاب  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2})$



Mob: 07902162268

83

اعدادية الكاظمية للبنين



1 دسمبر 2007

## زورونا على مواقع التواصل الاجتماعي



استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = x^5$ 

2000 دور 1

2006 دور 2

2008 تمهيدي

2007 خارج

القطر

2013 دور 3

2014 تمهيدي

sol : ① اوسع مجال للدالة R

② المحاذيات لا توجد

③ نقاط التقاطع

تأكيد || بعض الاسئلة الوزارية كانت

 $F(x) = x^3$  ويكون له نفس الحلif  $x = 0 \Rightarrow y = 0$  , if  $y = 0 \Rightarrow x = 0$ نقطة التقاطع مع المحورين الاحداثيين  $(0, 0)$ ① التناظر  $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$ المنحنى متناظر حول نقطة الاصل  $\Rightarrow f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$ 

⑤ النهايات

$$f'(x) = 5x^4 \Rightarrow 5x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$$

نقطة حرجة  $(0, 0) \Rightarrow f(0) = 0$ 

$$x < 0 \quad x > 0$$

+++++ 0 +++++ اشاراة المشتقة الاولى

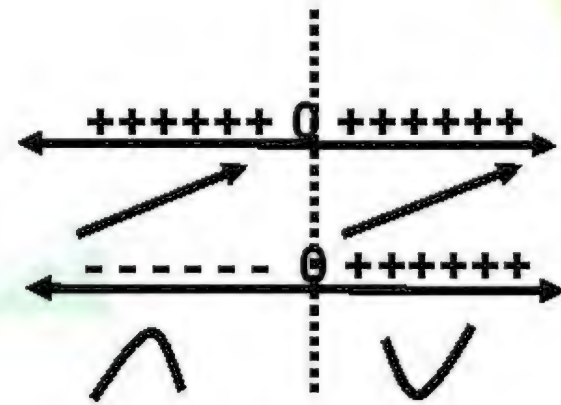
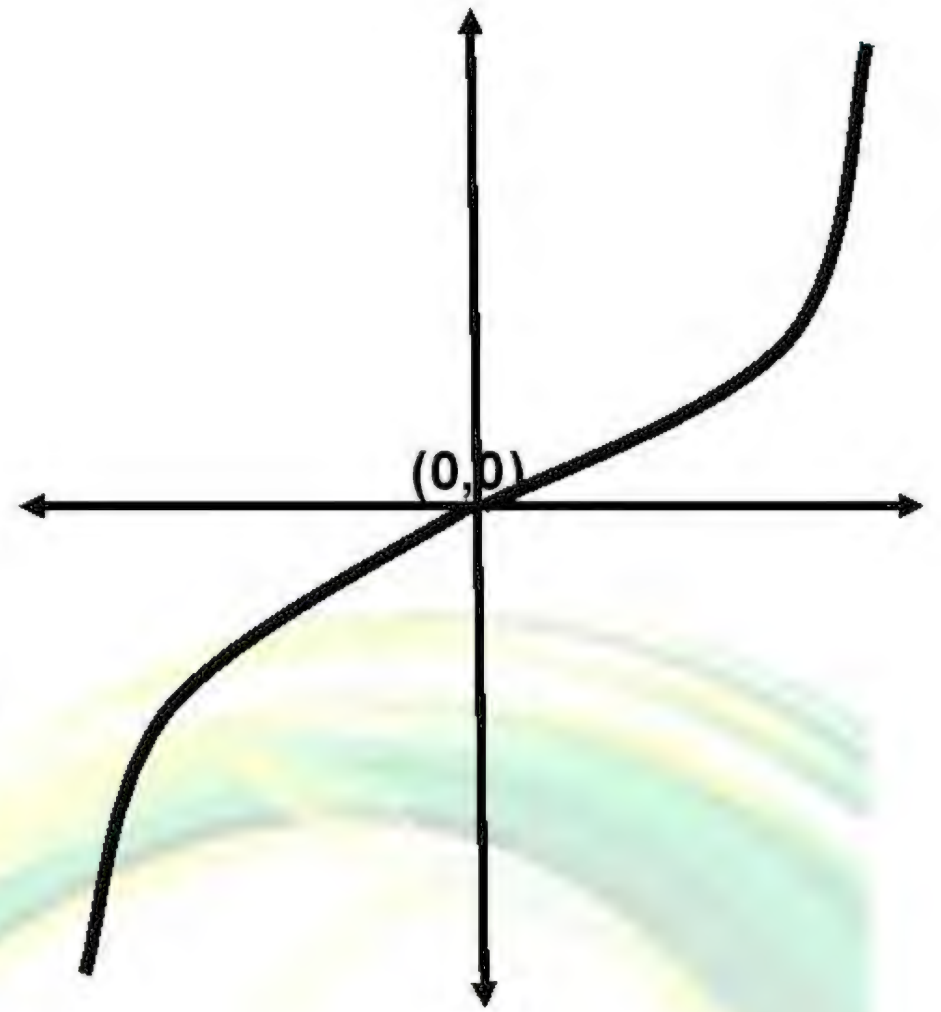
{  $x : x \in R ; x > 0$  } الدالة متزايدة بالفترة{  $x : x \in R ; x < 0$  } الدالة متزايدة بالفترةمجرد نقطة حرجة  $(0, 0)$ 

$$f''(x) = 20x^3 \Rightarrow 20x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

نقطة انقلاب مرشحة  $(0, 0) \Rightarrow f(0) = 0$ 

$$x < 0 \quad x > 0$$

----- 0 +++++ اشاراة المشتقة الثانية

{  $x : x \in R ; x > 0$  } الدالة مقعرة بالفترة{  $x : x \in R ; x < 0$  } الدالة محدبة بالفترةنقطة انقلاب  $(0, 0)$ 

Mob: 07902162268

85

اعدادية الكاظمية للبنين



2000 دور 2

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = (x^2 - 1)^2$ 

**sol :**  $f(x) = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

① اوسع مجال للدالة  $R$

② المحاذيات لا توجد

③ نقاط التقاطع

if  $x = 0 \Rightarrow y = 1$  , if  $y = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1) = 0$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين  $(0,1)$  ,  $(-1, 0)$  ,  $(1, 0)$

④ التناظر

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$  المنحنى متناظر حول محور الصادات

⑤ النهايات

$f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$  OR  $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$  OR  $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0$

نقاط حرجة  $(0, 1)$  ,  $(-1, 0)$  ,  $(1, 0)$

$x < -1$   $(-1, 0)$   $(0, 1)$   $x > 1$

-----(-1)+++++(0)----- (1)+++++

اشارة المشتقة الاولى

{  $x : x \in R ; x > 1$  } الدالة متزايدة بالفترة

{  $x : x \in R ; x < -1$  } الدالة متناقصة بالفترة

{  $x : x \in R ; x \in (-1, 0)$  } الدالة متزايدة بالفترة

{  $x : x \in R ; x \in (0, 1)$  } الدالة متناقصة بالفترة

نهاية عظمى  $(0, 1)$  , نهاية صغرى  $(1, 0)$  , نهاية صغرى  $(-1, 0)$

$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{9}$  ,  $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{9}$

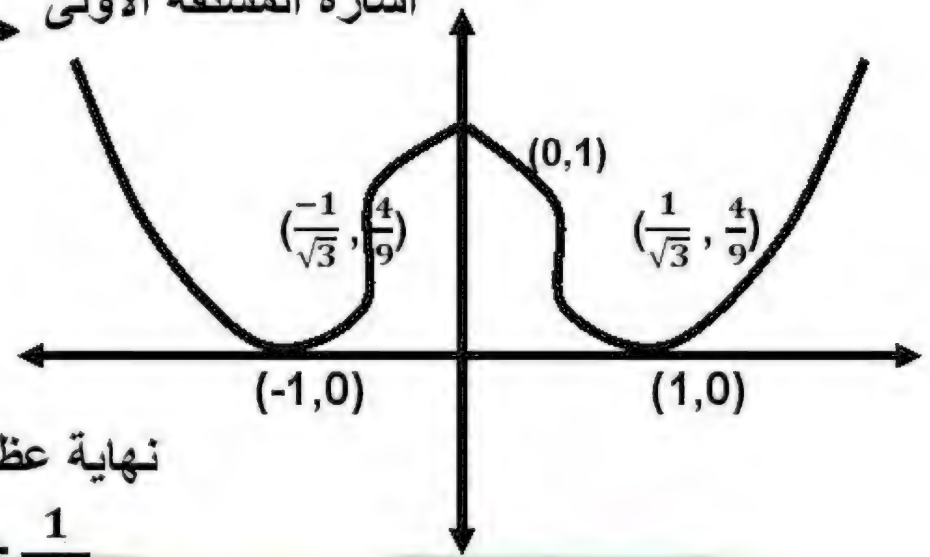
$\Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$  ,  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$  نقطة انقلاب مرشحة

+++++  $(-\frac{1}{\sqrt{3}})$  -----  $(\frac{1}{\sqrt{3}})$  +++++ اشارة المشتقة الثانية

{  $x : x \in R ; x > \frac{1}{\sqrt{3}}$  } , {  $x : x \in R ; x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$  } الدالة مقعرة بالفترتين

{  $x : x \in R ; x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  } الدالة محدبة بالفترة

نقاط انقلاب  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$  ,  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$



Mob: 07902162268

86

اعدادية الكاظمية للبنين



استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = x^3 + 3x^2$ 

2001 دور 2

① اوسع مجال للدالة  $R$ 

② المحاذيات لا توجد

③ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ if } y = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x + 3) = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3$$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين  $(0, 0), (-3, 0)$ 

④ التناظر

$$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$$

$$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2 = -(x^3 - 3x^2) \neq -f(x) \text{ لا يوجد تناظر}$$

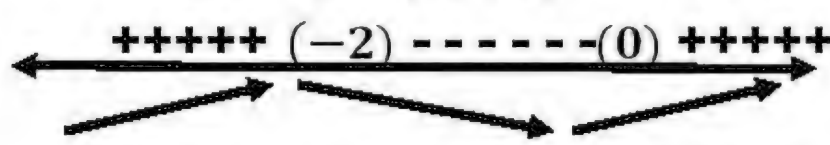
⑤ النهايات

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x + 2) = 0$$

$$\text{either } x = 0 \Rightarrow f(0) = 0, \text{ or } x = -2 \Rightarrow f(-2) = -8 + 12 = 4$$

نقاط حرجية  $(0, 0), (-2, 4)$ 

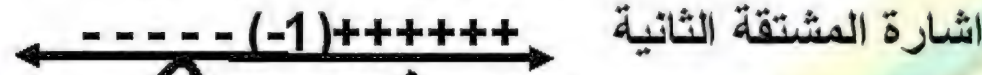
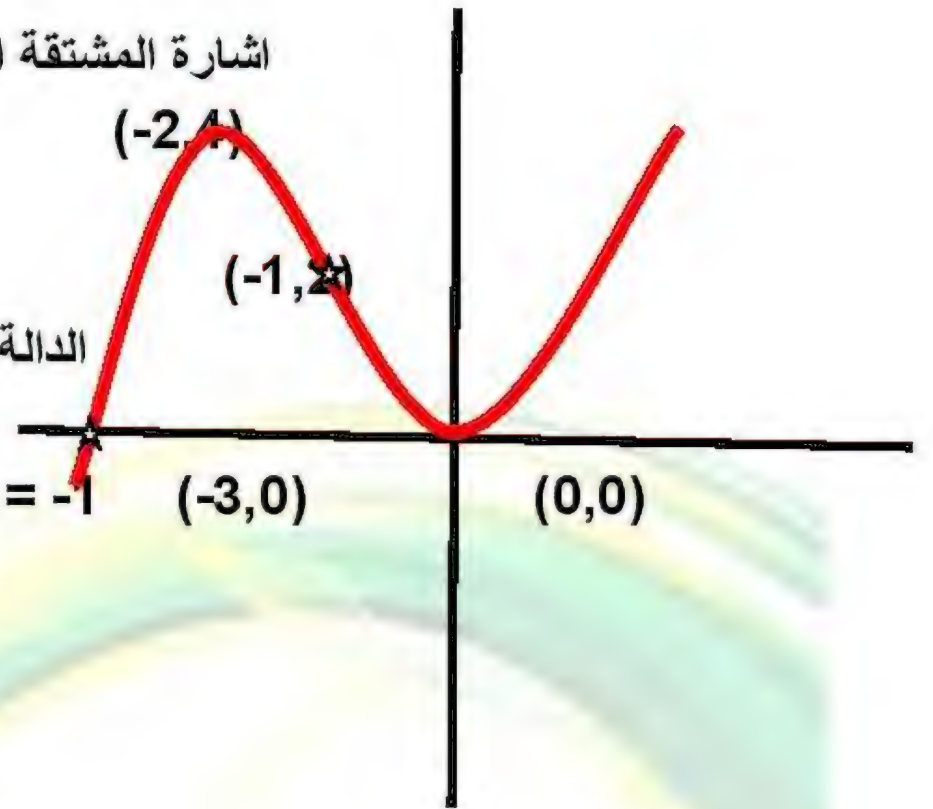
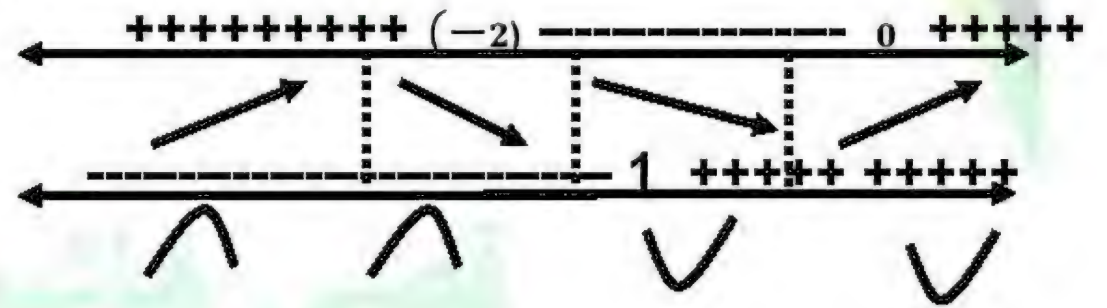
$$x < -2 \quad (-2, 0) \quad x > 0$$

الدالة متزايدة بالفترة  $\{x : x \in R; x > 0\}$ الدالة متزايدة بالفترة  $\{x : x \in R; x < -2\}$ الدالة متناقصة بالفترة  $\{x : x \in R; x \in (-2, 0)\}$ نهاية صغرى  $(0, 0)$ , نهاية عظمى  $(-2, 4)$ 

$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow (-1, 2) \text{ نقطة انقلاب مرشحة}$$

$$x < 0 \quad x > 0$$

الدالة محدبة بالفترة  $\{x : x \in R; x < -1\}$ الدالة مقعرة بالفترة  $\{x : x \in R; x > -1\}$ نقطة انقلاب  $(-1, 2)$ 



بأستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = x^2 - 2x - 3$

sol : ① اوسع مجال للدالة  $R$

② المحائيات لا توجد

③ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = -3, \text{ if } y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ OR } x = -1$$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين  $(0, -3), (3, 0), (-1, 0)$

④ التناظر  $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 3 = x^2 + 2x - 3 \neq -f(x) \Rightarrow \text{لا يوجد تناظر}$$

⑤ النهايات

$$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$$

نقطة حرجة  $(1, -4)$

$$x < -2 \quad x > -2$$

----- (1) ++++++ إشارة المشتقة الاولى

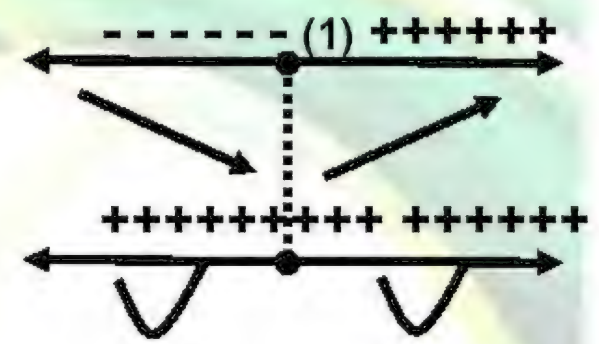
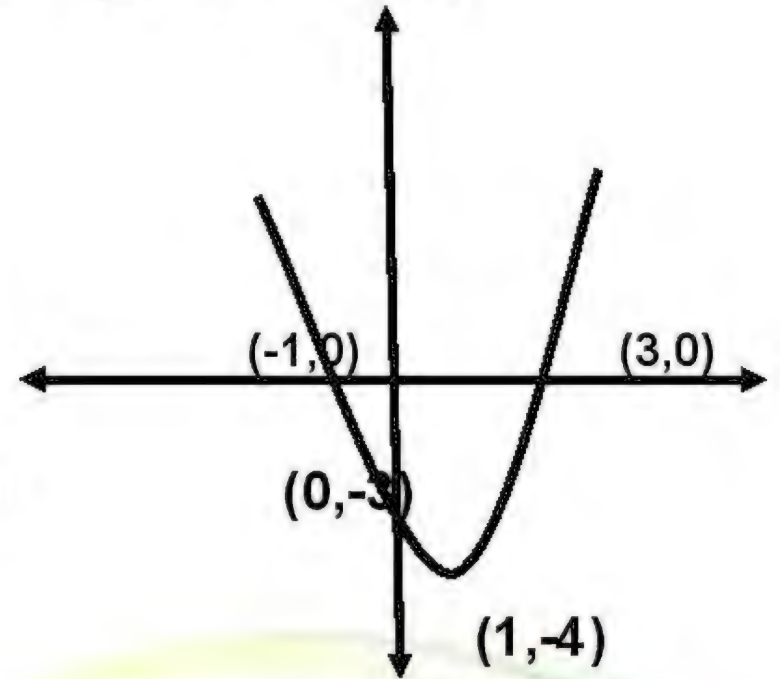
{  $x : x \in R ; x > 1$  } الدالة متزايدة بالفترة

{  $x : x \in R ; x < 1$  } الدالة متناقصة بالفترة

نقطة نهاية صغرى محلية  $(1, -4)$

$$f''(x) = 2 > 0$$

الدالة مقعرة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب





2005 تمهيدي

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = x^4 - 2x^2$ 

sol : ① اوسع مجال للدالة R

② المحاذيات لا توجد

③ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ if } y = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين  $(0, 0), (-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$ 

④ التناظر

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (-x) \in \mathbb{R}$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x) \Rightarrow \text{المنحنى متناظر حول محور الصادات}$$

⑤ النهايات

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ OR } x = 1 \Rightarrow f(1) = -1 \text{ OR } x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1$$

نقاط حرجة  $(0, 0), (-1, -1), (1, -1)$ 

$$x < -1 \quad (-1, 0) \quad (0, 1) \quad x > 1$$

$$\text{-----}(-1) \text{+++++}(0) \text{-----}(1) \text{+++++}$$

إشارة المشتقة الاولى

{x : x ∈ ℝ ; x &gt; 1} الدالة متزايدة بالفترة

{x : x ∈ ℝ ; x &lt; -1} الدالة متناقصة بالفترة

{x : x ∈ ℝ ; x ∈ (-1, 0)} الدالة متزايدة بالفترة

{x : x ∈ ℝ ; x ∈ (0, 1)} الدالة متناقصة بالفترة

نهاية عظمى (0, 0), نهاية صغرى (1, -1), نهاية صغرى (-1, -1)

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{9}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{9}$$

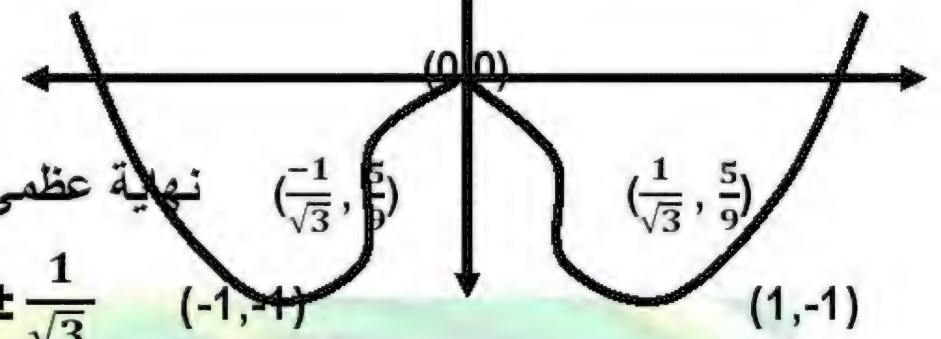
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right) \text{ نقطة انقلاب مرشحة}$$

$$\text{+++++} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{-----} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{+++++} \text{ إشارة المشتقة الثانية}$$

{x : x ∈ ℝ ; x &gt; 1/√3}, {x : x ∈ ℝ ; x &lt; -1/√3} الدالة مقعرة بالفترتين

{x : x ∈ ℝ ; x ∈ (-1/√3, 1/√3)} الدالة محدبة بالفترة

$$\text{نقاط انقلاب } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$$





استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = (x + 2)(x - 1)^2$ 

2005 دور 1

2008 دور 1

sol : ① اوسع مجال للدالة R

② المحاذيات لاتوجد

③ نقاط التقاطع

if  $x = 0 \Rightarrow y = 2$  , if  $y = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$  OR  $x = 1$   
 نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين  $(0, 2)$  ,  $(-2, 0)$  ,  $(1, 0)$

④ التناظر  $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$ لايوجد تناظر  $f(-x) = (-x + 2)(-x - 1)^2 = -(x - 2)(-x - 1)^2 \neq -f(x) \Rightarrow$ 

⑤ النهايات

$$f(x) = (x + 2)(x - 1)^2 = (x + 2)(x^2 - 2x + 1)$$

$$f'(x) = (x + 2)(2x - 2) + (x^2 - 2x + 1)(1) = 2x^2 - 2x + 4x - 4 + x^2 - 2x + 1$$

$$= 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \text{ OR } x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4$$

نقاط حرجة  $(1, 0)$  ,  $(-1, 4)$ 

$$x < -1 \quad (-1, 1) \quad x > 1$$

+++++ -1 - - - - - 1 ++++++

اشارة المشتقة الاولى

{  $x : x \in R ; x > 1$  } الدالة متزايدة بالفترة{  $x : x \in R ; x < -1$  } الدالة متزايدة بالفترة{  $x : x \in R ; x \in (-1, 1)$  } الدالة متناقصة بالفترةنهاية صغرى  $(1, 0)$  , نهاية عظمى  $(-1, 4)$ 

$$f''(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

نقطة انقلاب مرشحة  $f(0) = 2 \Rightarrow (0, 2)$ 

$$x < 0 \quad x > 0$$

- - - - - 0 ++++++

اشارة المشتقة الثانية

{  $x : x \in R ; x > 0$  } الدالة مقعرة بالفترة{  $x : x \in R ; x < 0$  } الدالة محدبة بالفترةنقطة انقلاب  $(0, 2)$ 

+++++ (-1) - - - - - 1 ++++++

- - - - - 0 ++++++

+++++ ++++++

+++++ ++++++

Mob: 07902162268

90

اعدادية الكاظمية للبنين



2006 دور 1

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ sol : ① اوسع مجال للدالة  $R$ 

② المحاذيات لا توجد

③ نقاط التقاطع

if  $x = 0 \Rightarrow y = 2$  , if  $y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1)^2 = 0$   
 $\Rightarrow x = -2$  OR  $x = 1 \Rightarrow (0, 2), (-2, 0), (1, 0)$  نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

④ التناظر  $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$ 

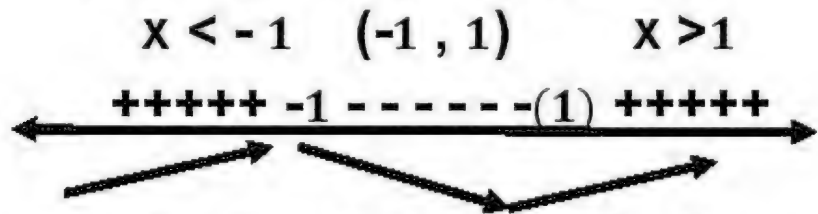
$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2 = -(x^3 - 3x - 2) \neq -f(x)$$

 $\Rightarrow$  المنحنى غير متناظر حول نقطة الاصل ولا حول محور الصادات

⑤ النهايات

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

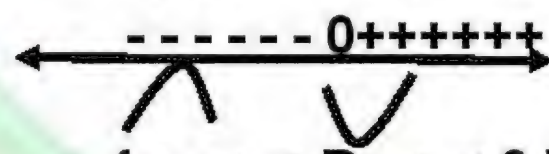
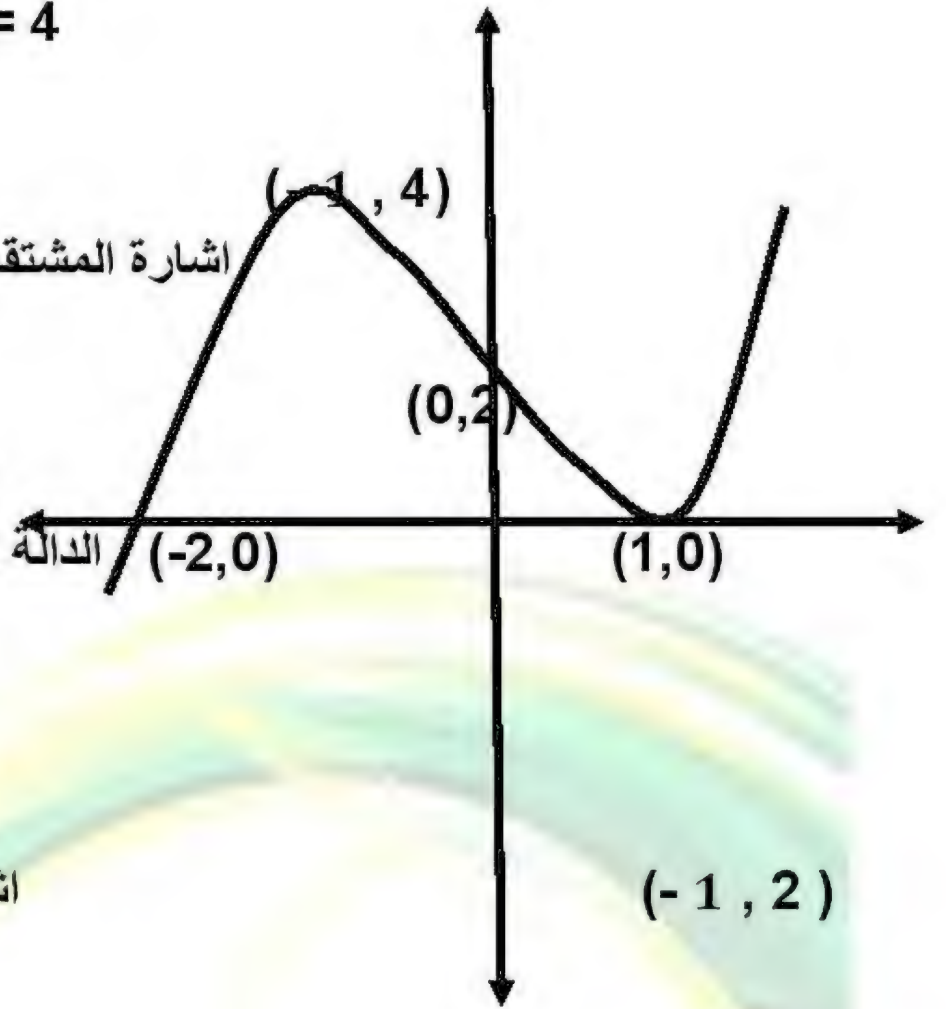
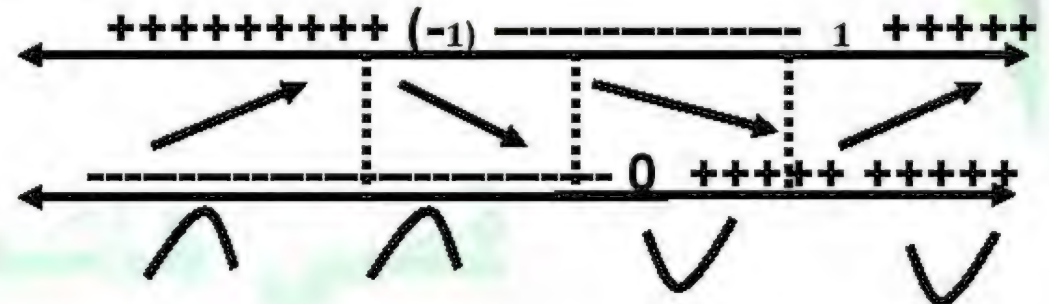
$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \text{ OR } x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4$$

نقاط حرجية  $(1, 0), (-1, 4)$ {  $x : x \in R ; x > 1$  } الدالة متزايدة بالفترة{  $x : x \in R ; x < -1$  } الدالة متزايدة بالفترة{  $x : x \in R ; x \in (-1, 1)$  } الدالة متناقصة بالفترةنهاية صغرى  $(1, 0)$ , نهاية عظمى  $(-1, 4)$ 

$$f''(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

نقطة انقلاب مرشحة  $f(0) = 2 \Rightarrow (0, 2)$ 

$$x < 0 \quad x > 0$$

{  $x : x \in R ; x < 0$  } الدالة محدبة بالفترة{  $x : x \in R ; x > 0$  } الدالة مقعرة بالفترةنقطة انقلاب  $(0, 2)$ 

Mob: 07902162268

91

اعدادية الكاظمية للبنين



2009 تمهيدي

2014 خارج الخطر

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sol : ①  $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow R / \{-1\}$  اوسع مجال للدالة② المحاذى الافقى  $y = 0$  , المحاذى العمودى  $x = -1$ 

③ نقاط التقاطع

غير ممكن if  $x = 0 \Rightarrow y = 1$  , if  $y = 0$ نقطة التقاطع مع محور الصادات  $(0, 1)$ 

④ التناظر

بما ان العدد (1) ينتمى الى مجال الدالة لكن العدد (-1) لا ينتمى لها فالمنحنى غير متناظر  
لا مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

⑤ النهايات

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \neq 0$$

$$x < -1 \quad x > -1$$

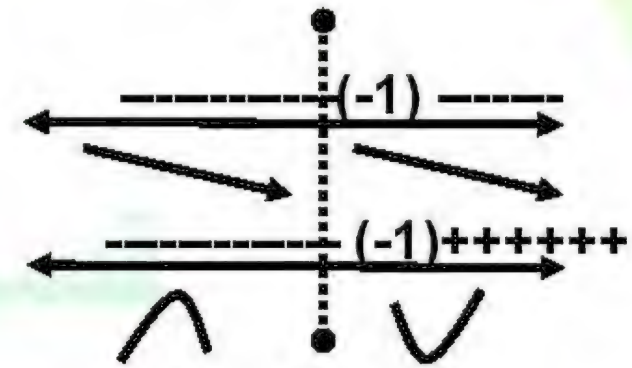
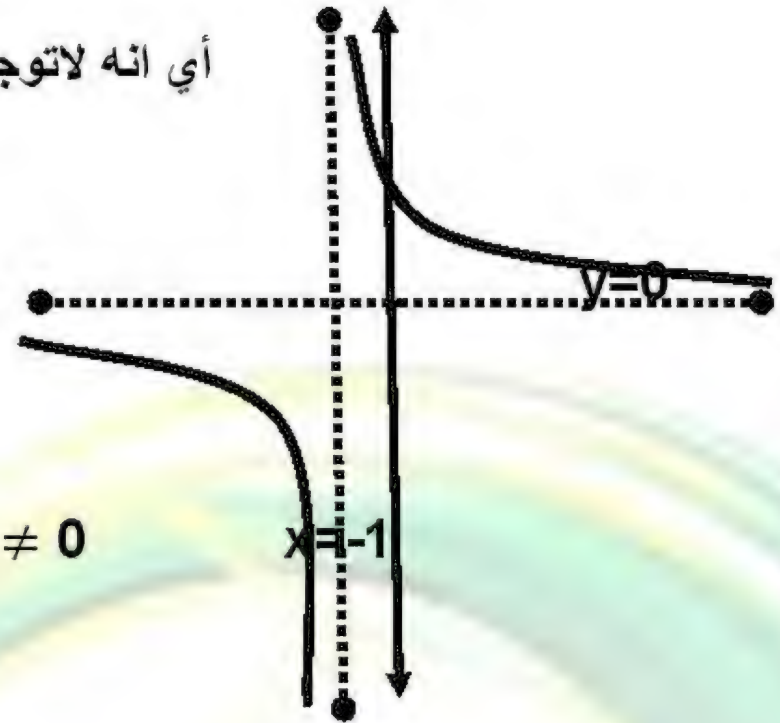
أي انه لا توجد نقاط حرجة  
اشارة المشتقة الاولىالدالة متناقصة بالفترتين  
 $\{x : x \in R ; x > -1\}$   
 $\{x : x \in R ; x < -1\}$ 

$$f''(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot (0) + 1 [2(x+1)]}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0$$

أي انه لا توجد نقاط انقلاب

$$x < -1 \quad x > -1$$

اشارة المشتقة الثانية

الدالة مقعرة بالفتره  
 $\{x : x \in R ; x > -1\}$   
الدالة محدبة بالفتره  
 $\{x : x \in R ; x < -1\}$ 

Mob: 07902162268

92

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = 6x - 2x^3$ 

2011 دور 1

2015 دور 3

sol : ① اوسع مجال للدالة R

② المحاذيات لا توجد ③ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ if } y = 0 \Rightarrow 6x - 2x^3 = 0 \Rightarrow 2x(3 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ OR } x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين  $(0, 0), (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$ 

④ التناظر

$$f(-x) = 6(-x) - 2(-x)^3 = -6x + 2x^3 = -(6x - 2x^3) = -f(x) \Rightarrow \text{المنحنى متناظر حول نقطة الاصل}$$

⑤ النهايات

$$f'(x) = 6 - 6x^2 \Rightarrow 6 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 4 \text{ OR } x = -1 \Rightarrow f(-1) = -4$$

نقاط حرجية  $(1, 4), (-1, -4)$ 

$$x < -1 \quad (-1, 1) \quad x > 1$$

----- (-1) +++++ 1 ----- اشارة المشتقة الاولى

{x : x ∈ R ; x &gt; 1} الدالة متناقصة بالفترة

{x : x ∈ R ; x &lt; -1} الدالة متناقصة بالفترة

{x : x ∈ R ; x ∈ (-1, 1)} الدالة متزايدة بالفترة

نهاية صغرى  $(-1, -4)$ , نهاية عظمى  $(1, 4)$ 

$$f''(x) = -12x \Rightarrow -12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

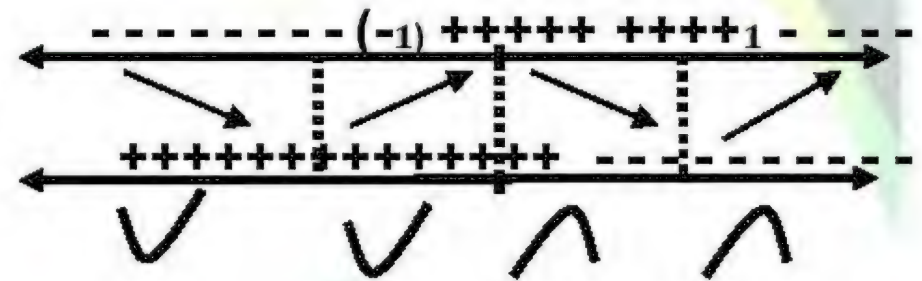
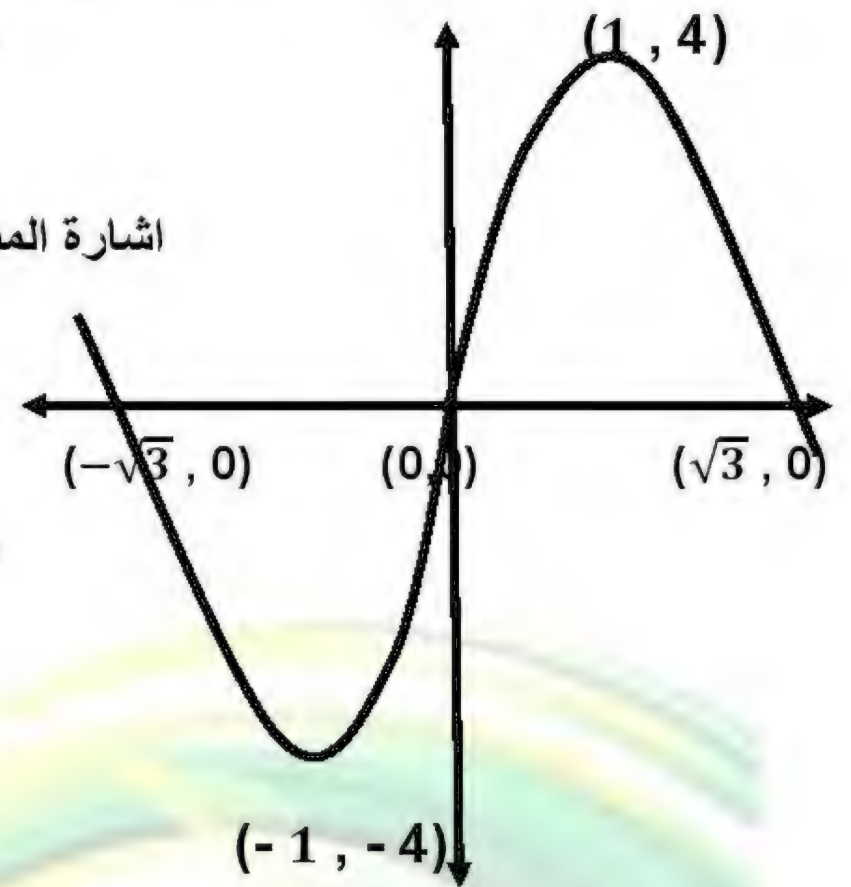
نقطة انقلاب مرشحة  $(0, 0)$ 

$$x < 0 \quad x > 0$$

+++++ 0 ----- اشارة المشتقة الثانية

{x : x ∈ R ; x &lt; 0} الدالة مقعرة بالفترة

{x : x ∈ R ; x &gt; 0} الدالة محدبة بالفترة

نقطة انقلاب  $(0, 0)$ 



استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = (1 - x)^3 + 1$ 

2011 دور 2

2013 دور 2

2016 تمهيدي

sol : ① اوسع مجال للدالة R

② المحاذيات لا توجد

③ نقاط التقاطع

بالجذر التكعيبي  $\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 2$  ,  $\text{if } y = 0 \Rightarrow (1 - x)^3 + 1 = 0 \Rightarrow (1 - x)^3 = -1$ 

$$1 - x = -1 \Rightarrow x = 2$$

نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين  $(0, 2)$  ,  $(2, 0)$ 

④ التناظر

$$f(-x) = (1 + x)^3 + 1 = -[(-1-x)^3 - 1] \neq -f(x) \text{ لا يوجد تناظر}$$

⑤ النهايات

$$f'(x) = 3(1 - x)^2 (-1) = -3(1 - x)^2 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

نقطة حرجة  $f(1) = 1 \Rightarrow (1, 1)$ 

$$x < 1 \quad x > 1$$

اشارة المشتقة الاولى

{  $x : x \in \mathbb{R} ; x > 1$  } الدالة متناقصة بالفترتين{  $x : x \in \mathbb{R} ; x < 1$  }مجرد نقطة حرجة  $(1, 1)$ 

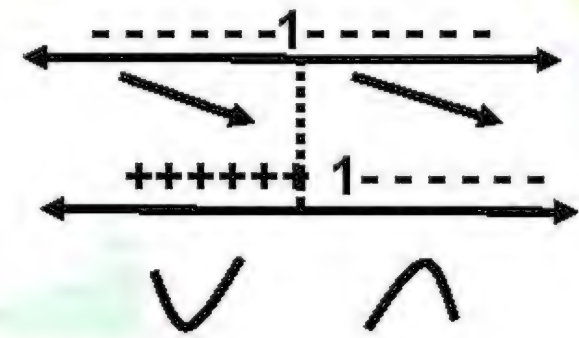
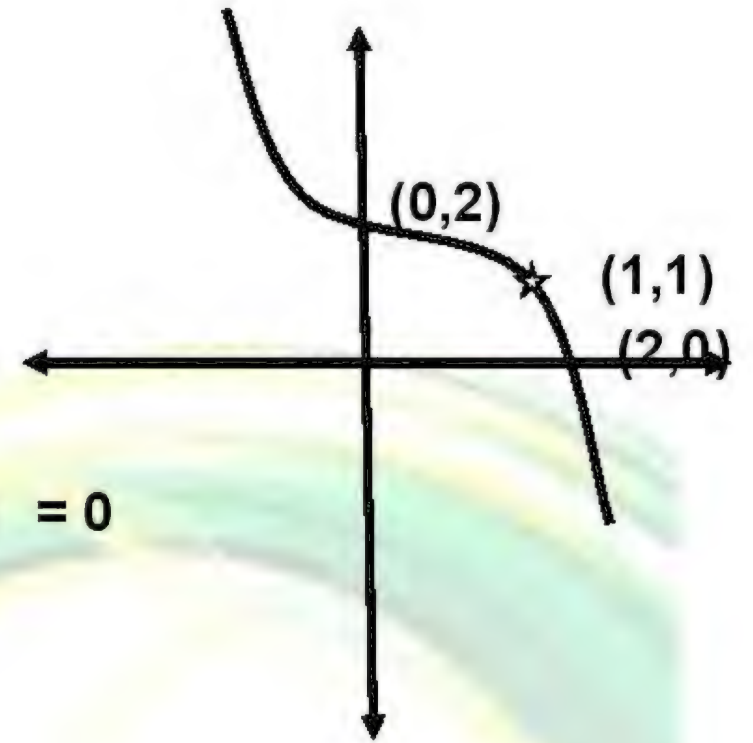
$$f''(x) = -6(1 - x) (-1) = 6(1 - x) \Rightarrow 6(1 - x) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

نقطة انقلاب مرشحة  $f(1) = 1 \Rightarrow (1, 1)$ 

$$x < 1 \quad x > 1$$

اشارة المشتقة الثانية

{  $x : x \in \mathbb{R} ; x < 1$  } الدالة مقعرة بالفترتين{  $x : x \in \mathbb{R} ; x > 1$  } الدالة محدبة بالفترتيننقطة انقلاب  $(1, 1)$ 



استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = 2x^2 - x^4$ 

2012 دور 2

sol : ① اوسع مجال للدالة R

② المحاذيات لا توجد

③ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ if } y = 0 \Rightarrow 2x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(2 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

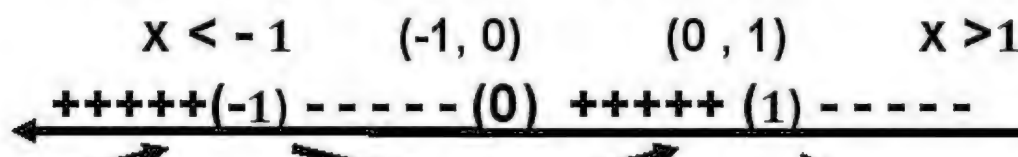
نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين  $(0, 0), (-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$ ④ التناظر  $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$ 

$$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4 = f(x) \Rightarrow \text{المنحنى متناظر حول محور الصادات}$$

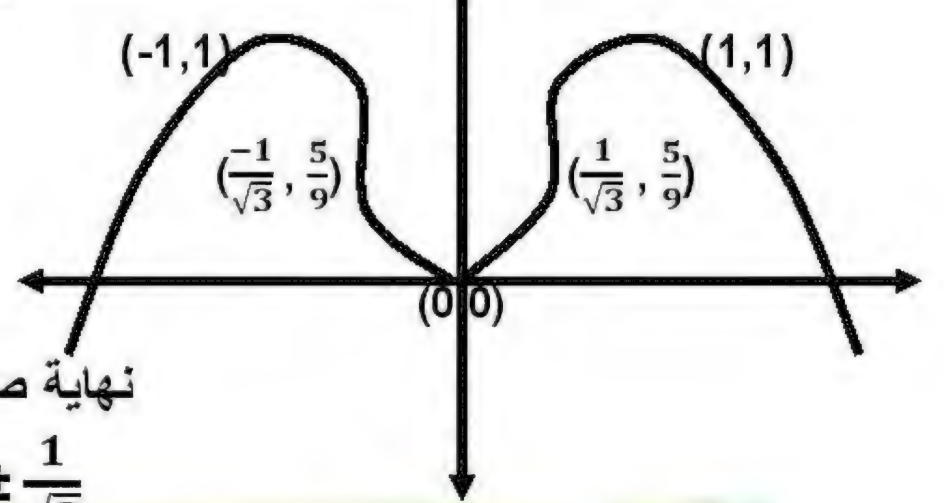
⑤ النهايات

$$f'(x) = 4x - 4x^3 \Rightarrow 4x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ OR } x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \text{ OR } x = -1 \Rightarrow f(-1) = 1$$

نقاط حرجية  $(0, 0), (-1, 1), (1, 1)$ 

اشارة المشتقة الاولى



{x : x ∈ R ; x &gt; 1} الدالة متناقصة بالفترة

{x : x ∈ R ; x &lt; -1} الدالة متزايدة بالفترة

{x : x ∈ R ; x ∈ (-1, 0)} الدالة متناقصة بالفترة

{x : x ∈ R ; x ∈ (0, 1)} الدالة متزايدة بالفترة

نهاية صغرى (0, 0), نهاية عظمى (1, 1), نهاية عظمى (-1, 1)

$$f''(x) = 4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

نقطة انقلاب مرشحة  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ 

$-----(-\frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ } ++++++(\frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ } -----$

اشارة المشتقة الثانية

{x : x ∈ R ; x &gt; 1/√3}, {x : x ∈ R ; x &lt; -1/√3} الدالة محدبة بالفترتين

{x : x ∈ R ; x ∈ (-1/√3, 1/√3)} الدالة مقعرة بالفترة

نقاط انقلاب  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$



استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = \frac{1}{x}$ 

2012 تمهيدي

sol : ① اوسع مجال للدالة  $R/ \{0\}$ ② المحاذي الافقي  $y = 0$  , المحاذي العمودي  $x = 0$ 

③ نقاط التقاطع

غير معرف  $x = 0 \Rightarrow y =$  غير معرف ,  $y = 0 \Rightarrow x =$  غير معرفلا توجد نقاط تقاطع مع المحورين الاحداثيين  $x \neq 0$  ,  $y \neq 0$ ④ التناظر  $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$ 

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = -\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

 $\Rightarrow$  المنحنى متناظر حول نقطة الاصل

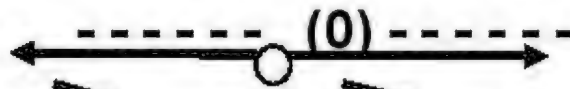
⑤ النهايات

$$f'(x) = \frac{(x)(0) - (1)(1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \neq 0$$

 $x < 0$   $x > 0$ 

أي انه لا توجد نقاط حرجة

اشارة المشتقة الاولى

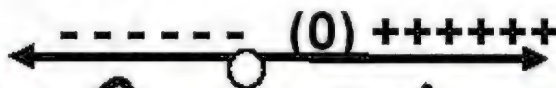
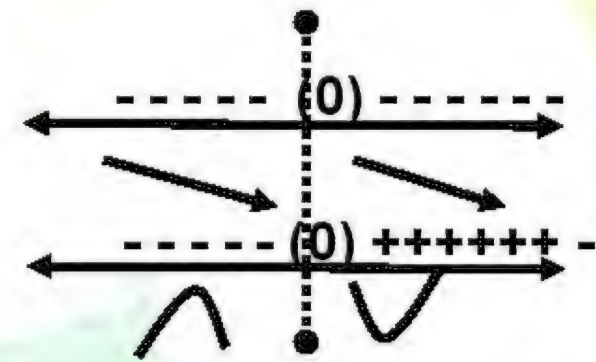
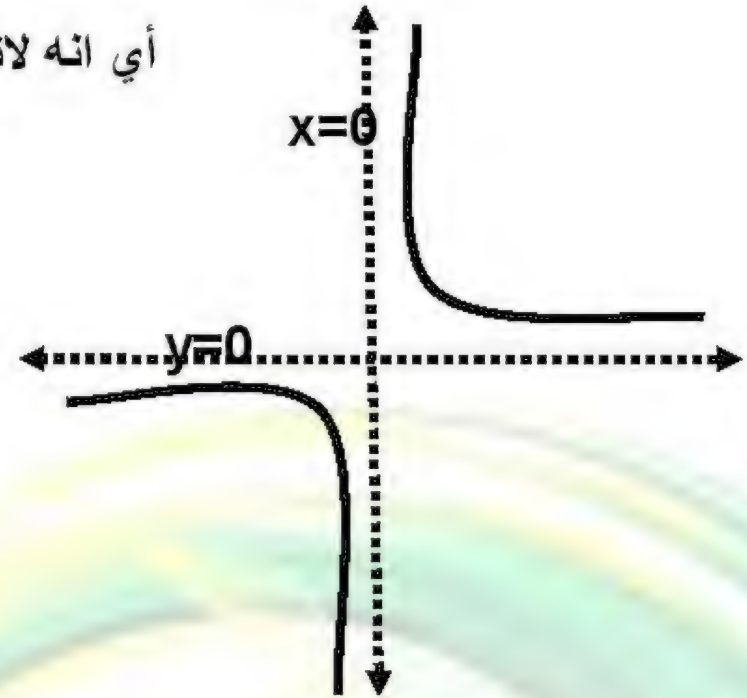
الدالة متناقصة بالفترتين  $\{x : x \in R ; x > 0\}$  $\{x : x \in R ; x < 0\}$ 

$$f''(x) = \frac{x^2 \cdot (0) - (-1)(2x)}{x^4} = \frac{2}{x^3} \neq 0$$

أي انه لا توجد نقاط انقلاب

 $x < 0$   $x > 0$ 

اشارة المشتقة الثانية

الدالة مقعرة بالفترة  $\{x : x \in R ; x > 0\}$ الدالة محدبة بالفترة  $\{x : x \in R ; x < 0\}$ 



2013 تمهيدي

استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = 10 - 3x - x^2$ 

sol : ① اوسع مجال للدالة R

② المحانيات لا توجد

③ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 10, \text{ if } y = 0 \Rightarrow 10 - 3x - x^2 = 0 \Rightarrow (2 - x)(5 + x) = 0$$

$$\Rightarrow x = -5 \text{ OR } x = 2$$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين  $(0, 10), (-5, 0), (2, 0)$ ④ التناظر  $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$ 

$$f(-x) = 10 - 3(-x) - (-x)^2 = 10 + 3x - x^2 \neq -f(x) \Rightarrow \text{لا يوجد تناظر}$$

⑤ النهايات

$$f'(x) = -3 - 2x \Rightarrow -3 - 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 10 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{40+18-9}{4} = \frac{49}{4}$$

نقطة حرجة  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ 

$$x < -\frac{3}{2} \quad x > -\frac{3}{2}$$

+++++  $-\frac{3}{2}$  ----- إشارة المشتقة الاولى

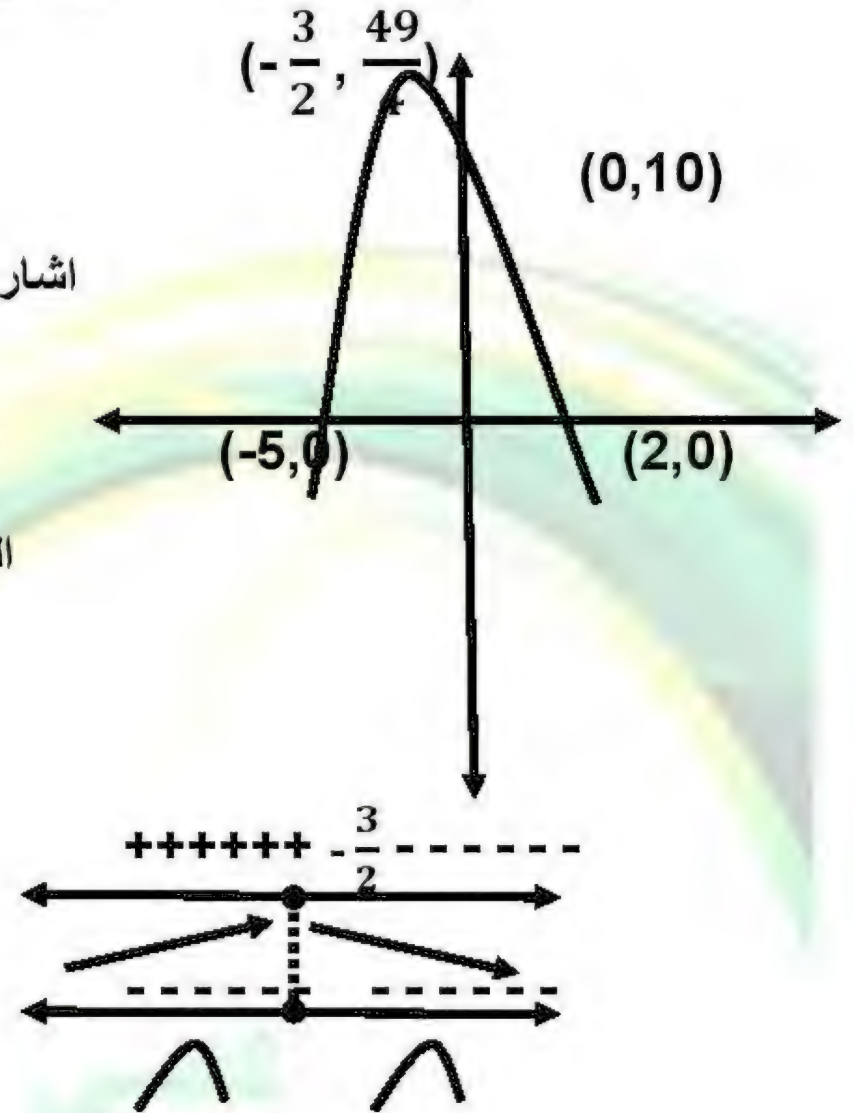
{ x : x ∈ R ; x &lt; -\frac{3}{2} } الدالة متزايدة بالفترة

{ x : x ∈ R ; x &gt; -\frac{3}{2} } الدالة متناقصة بالفترة

نقطة نهاية عظمى محلية  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ 

$$f''(x) = -2$$

الدالة محدبة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب



Mob: 07902162268

97

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



استخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = \frac{3}{x^2}$ 

sol :  $y = \frac{3}{x^2}$

- ① اوسع مجال للدالة  $R / \{0\}$
- ② المحاذي الافقي  $y = 0$  , المحاذي العمودي  $x = 0$
- ③ نقاط التقاطع

if  $x = 0 \Rightarrow y = \infty$ , if  $y = 0 \Rightarrow x = \infty$

لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين الاحداثيين  $x \neq 0$  ,  $y \neq 0$ 

## ④ التناظر

المنحنى متناظر حول محور الصادات  $\Rightarrow f(-x) = \frac{3}{(-x)^2} = \frac{3}{x^2} = f(x)$

## ⑤ النهايات

$$f'(x) = \frac{(x)(0) - (3)(2x)}{x^4} = \frac{-6}{x^3} \neq 0$$

أي انه لا توجد نقاط حرجة

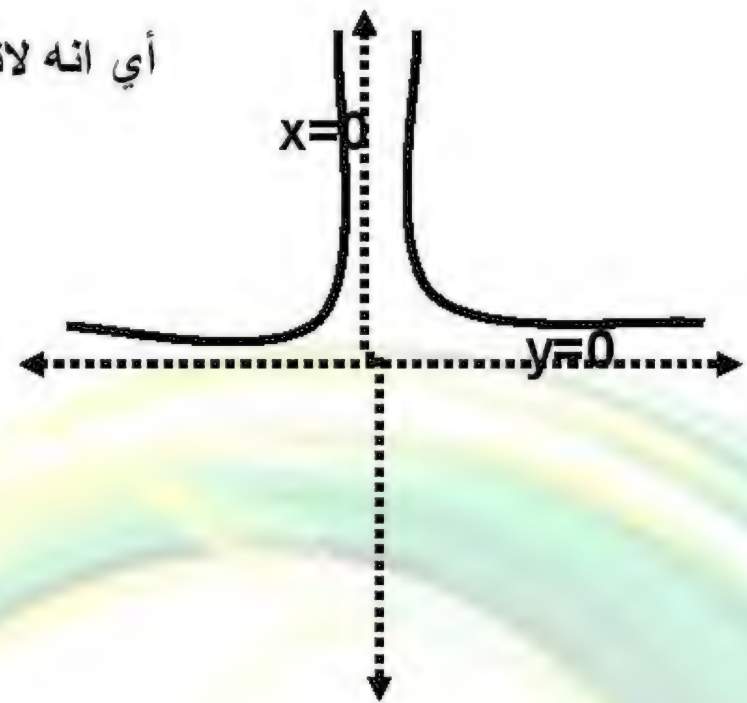
اشارة المشتقة الاولى

$x < 0$   $x > 0$

+++++ (0) -----

الدالة متناقصة بالفترة  $\{x : x \in R ; x > 0\}$

الدالة متزايدة بالفترة  $\{x : x \in R ; x < 0\}$



$$f''(x) = \frac{x^2 \cdot (0) - (-6)(3x^2)}{x^6} = \frac{18}{x^4} \neq 0$$

أي انه لا توجد نقاط انقلاب

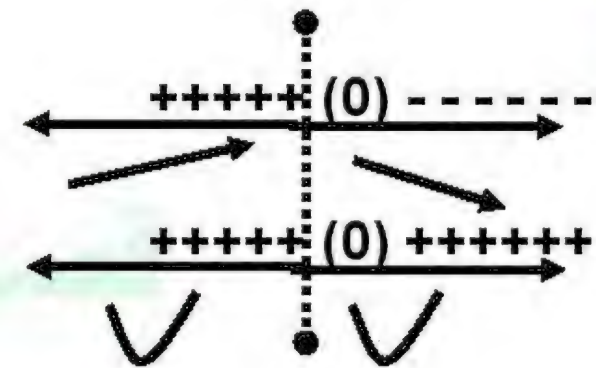
$x < 0$   $x > 0$

+++++ (0) +++++

اشارة المشتقة الثانية

الدالة مقعرة بالفترتين  $\{x : x \in R ; x > 0\}$

$\{x : x \in R ; x < 0\}$





باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

2015 تمهيدي

المحاذايات لا توجد ② ، اوسع مجال للدالة R ① sol :

نقاط التقاطع ④

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 4, \text{ if } y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - x^2 - 3x^2 + 4 = 0 &\Rightarrow x^3 + x^2 - 4x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) - 4(x^2-1) = 0 \\ x^2(x+1) - 4(x-1)(x+1) &= 0 \Rightarrow (x+1)[x^2 - 4(x-1)] = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0 \\ (x+1)(x-2)^2 &= 0 \Rightarrow x = -1 \text{ OR } x = 2 \end{aligned}$$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين هي  $(0, 4), (-1, 0), (2, 0)$

التناظر ①  $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4 = -(x^3 + 3x^2 - 4) \neq -f(x)$$

لا يوجد تناظر مع محور الصادات او نقطة الاصل  $\Rightarrow$

النهايات ⑤  $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 4 \text{ OR } x = 2 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow (0, 4), (2, 0) \text{ نقاط حرجة}$$

$$\begin{array}{c} x < 0 \quad (0, 2) \quad x > 2 \\ \text{++++++ 0} \quad \text{----- 2} \quad \text{++++++} \end{array}$$

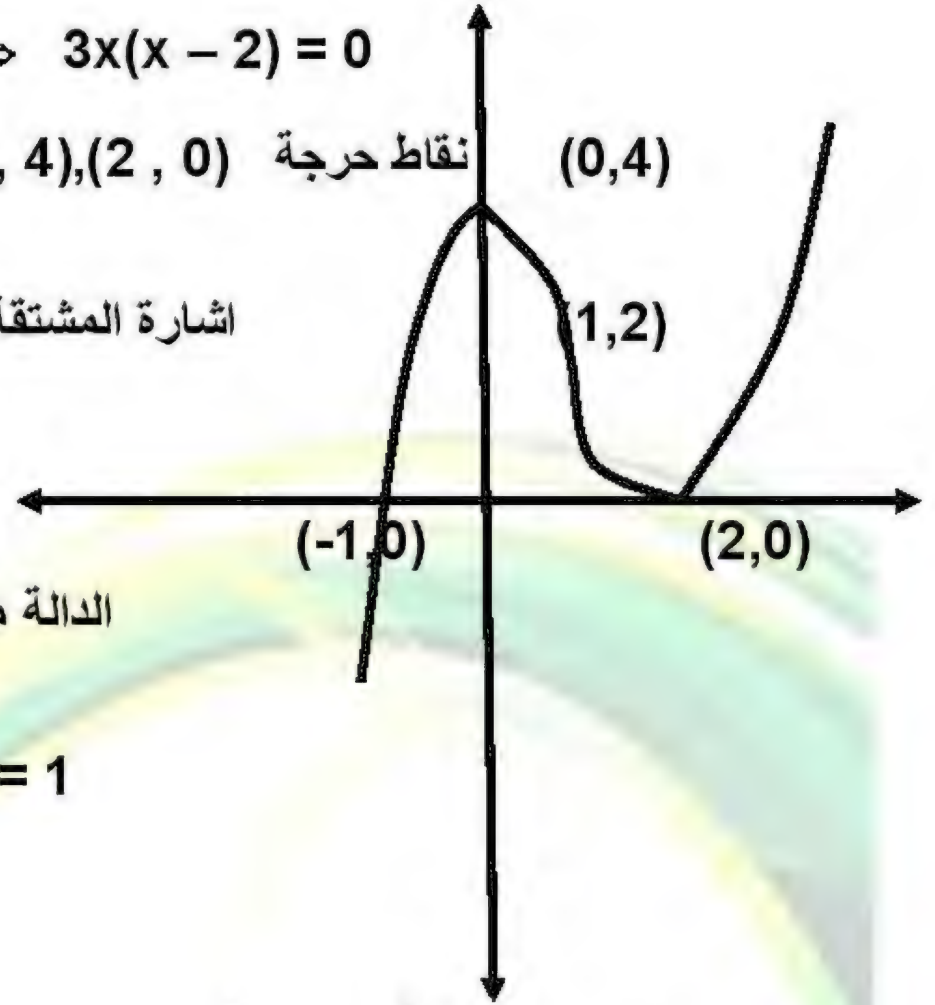
الدالة متزايدة بالفترة  $\{x : x \in R; x > 2\}$   
الدالة متزايدة بالفترة  $\{x : x \in R; x < 0\}$   
الدالة متناقصة بالفترة  $\{x : x \in R; x \in (0, 2)\}$   
نهاية صغرى  $(2, 0)$  ، نهاية عظمى  $(0, 4)$

$$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow (1, 2) \text{ نقطة انقلاب مرشحة}$$

$$\begin{array}{c} x < 1 \quad x > 1 \\ \text{----- 1} \quad \text{++++++} \end{array}$$

الدالة مقعرة بالفترة  $\{x : x \in R; x > 1\}$   
الدالة محدبة بالفترة  $\{x : x \in R; x < 1\}$   
نقطة انقلاب  $(1, 2)$



Mob: 07902162268

99

اعدادية الكاظمية للبنين



باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة  $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

2015 دور 2 خارج

sol : ① اوسع مجال للدالة  $R$ ② المحاذى الافقى  $y = 0$  ، المحاذى العمودى (لا يوجد)

③ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = 2, \quad y \neq 0$$

نقطة التقاطع مع المحور الصادى  $(0, 2)$ 

④ التناظر

$$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$$

$$f(-x) = \frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3} = f(x) \Rightarrow \text{المنحنى متناظر حول محور الصادات}$$

⑤ النهايات

$$f'(x) = \frac{(x^2+3)(0) - (6)(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{-12x}{(x^2+3)^2} = 0$$

$$-12x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2) \text{ نقطة حرجة}$$

$$x < 0 \quad x > 0$$

+++++ (0) ----- اشارة المشتقة الاولى

{ x : x ∈ R ; x &lt; 0 } الدالة متزايدة بالفترة

{ x : x ∈ R ; x &gt; 0 } الدالة متناقصة بالفترة

(0, 2) نقطة نهاية عظمى محلية

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2 \cdot (-12) - (-12x) \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = \frac{-12(x^2+3)^2 + 48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)[-12(x^2+3) + 48x^2]}{(x^2+3)^4} = \frac{-12x^2 - 36 + 48x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3} = 0$$

$$36x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 36x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

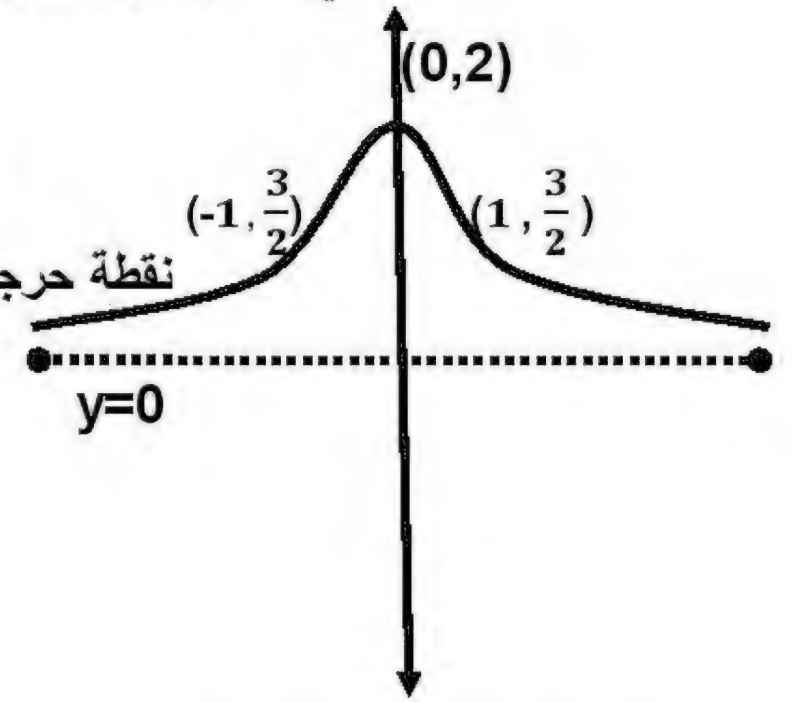
$$y = \frac{6}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

نقاط انقلاب مرشحة  $(1, \frac{3}{2}), (-1, \frac{3}{2})$ 

+++++ (-1) ----- (1) +++++ اشارة المشتقة الثانية

{ x : x ∈ R ; x &gt; 1 }, { x : x ∈ R ; x &lt; -1 } الدالة مقعرة بالفترتين

{ x : x ∈ R ; x ∈ (-1, 1) } الدالة محدبة بالفترة

نقاط انقلاب  $(1, \frac{3}{2}), (-1, \frac{3}{2})$ 

Mob: 07902162268

100

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة}$$

2016 دور 2

sol : ①  $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow R / \{-1\}$  اوسع مجال للدالة

②  $x = -1$  المحاذى العمودى ,  $y = 1$  المحاذى الأفقى

③ نقاط التقاطع

$$\text{if } x = 0 \Rightarrow y = -1, \text{ if } y = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين  $(0, -1), (1, 0)$

④ التناظر

بما ان العدد (1) ينتمى الى مجال الدالة لكن العدد (-1) لا ينتمى لها فالمنحنى غير متناظر  
لا مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

⑤ النهايات

$$f'(x) = \frac{(x+1)(1) - (1x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \neq 0$$

$$x < -1 \quad x > -1$$

أى انه لا توجد نقاط حرجة

+++++ (-1) +++++ إشارة المشتقة الاولى

{  $x : x \in R ; x > -1$  } الدالة متزايدة بالفترتين

{  $x : x \in R ; x < -1$  }

$$f''(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot (0) - 2[2(x+1)]}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3} \neq 0$$

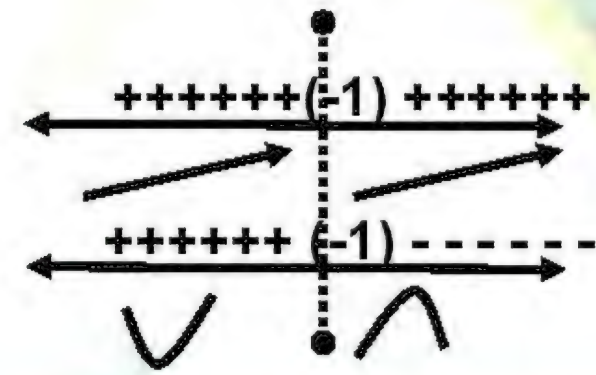
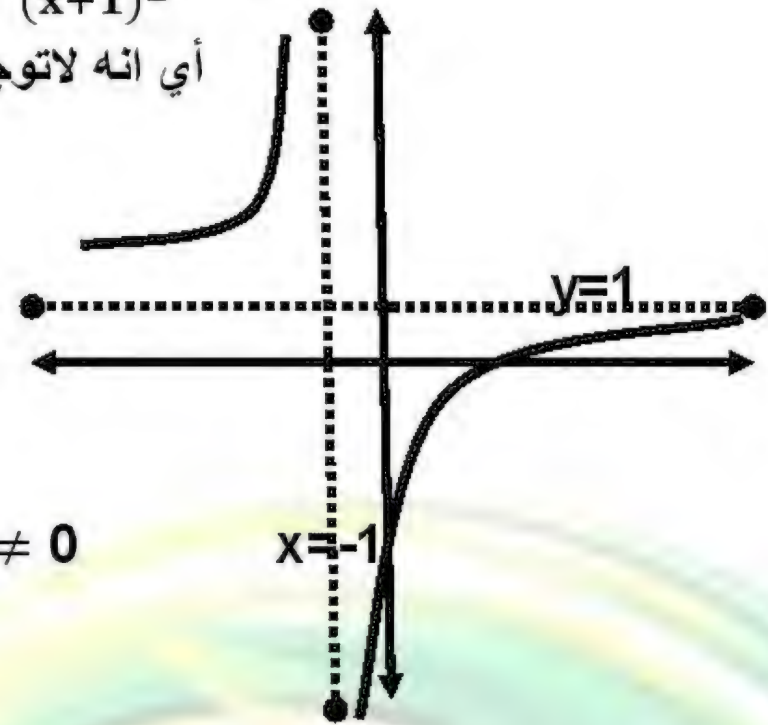
أى انه لا توجد نقاط انقلاب

$$x < -1 \quad x > -1$$

+++++ (-1) ----- إشارة المشتقة الثانية

{  $x : x \in R ; x > -1$  } الدالة محدبة بالفترة

{  $x : x \in R ; x < -1$  } الدالة مقعرة بالفترة





إذا كانت  $f(x) = 3 + ax + bx^2$  تمتلك نقطة حرجة (1,4) جد قيمتي  $a, b$  الحقيقيتان ثم بين نوع النقطة الحرجة .

1997 دور 2

2007 تمهيدي

خطوة عمل النقطة الحرجة  $f'(1) = 0$  ,  $f(1) = 4$  sol:

$$f(x) = 3 + ax + bx^2 \Rightarrow 4 = 3 + a + b \Rightarrow a + b = 1 \dots (1)$$

$$f'(x) = a + 2bx \Rightarrow 0 = a + 2b \Rightarrow a = -2b \dots (2) \text{ in } (1)$$

$$-2b + b = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 2$$

النقطة الحرجة هي نقطة نهاية عظمى محلية  $f''(x) = 2b = -2 < 0$

إذا كانت (1, 6) نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة  $f(x) = ax^2 + (x - b)^2$  جد قيمتي  $a, b$

1998 دور 1

$$\text{sol : } f(1) = 6 \Rightarrow 6 = a + (1 - b)^2 \Rightarrow 6 = a + 1 - 2b + b^2 \Rightarrow a - 2b + b^2 = 5 \dots (1)$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2ax + 2(x - b) \Rightarrow [2a + 2(1 - b) = 0] \div 2$$

$$a = b - 1 \dots (2) \text{ تعوض في (1)}$$

$$b - 1 - 2b + b^2 = 5 \Rightarrow b^2 - b - 6 = 0 \Rightarrow (b - 3)(b + 2) = 0$$

$$b = 3 \Rightarrow a = 3 - 1 = 2, b = -2 \Rightarrow a = -2 - 1 = -3$$

يهمل  $f''(x) = 2a + 2$  ,  $a = 2 \Rightarrow f''(x) = 6 > 0$  ,  $a = -3 \Rightarrow f''(x) = -4 < 0$   
مجموعة الحل  $\{a = 2, b = 3\}$

إذا كانت (2, 6) نقطة حرجة لمنحني الدالة  $f(x) = a - (x - b)^4$  فجد قيمتي  $a, b$  ثم بين نوع النقطة الحرجة .

2011 خارج القطر

$$\text{sol : } f(2) = 6 \Rightarrow 6 = a - (2 - b)^4 \dots (1)$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = -4(x - b)^3 \Rightarrow -4(2 - b)^3 = 0 \Rightarrow 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2 \text{ (in 1)}$$

$$6 = a - (2 - 2)^4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow f(x) = 6 - (x - 2)^4$$

هذه الطريقة فاشلة في تحديد نوع النقطة  $f''(x) = -12(x - 2)^2 \Rightarrow f''(2) = -12(2 - 2)^2 = 0$

نقطة نهاية عظمى محلية (2, 6)  $\Rightarrow$  إشارة  $f'(x)$

$x < 2$        $x > 2$   
 $\leftarrow \text{++++++} (2) \text{-----} \rightarrow$   
 $\swarrow \quad \searrow$



2009 دور 1

إذا كانت  $(-2, 1)$  نقطة حرجة لمنحني الدالة  $f(x) = ax^2 - (x + b)^2$  جد قيمتي  $a, b \in \mathbb{R}^+$  ثم بين نوع النقطة الحرجة .

**sol :**  $f(1) = -2 \Rightarrow -2 = a - (1 + b)^2 \Rightarrow -2 = a - (1 + 2b + b^2)$

$$-2 = a - 1 - 2b - b^2 \Rightarrow a - 2b - b^2 = -1 \dots (1)$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2ax - 2(x + b) \Rightarrow [2a - 2(1 + b) = 0] \div 2$$

$$a = b + 1 \dots (2) \quad \text{تعوض في (1)}$$

$$b + 1 - 2b - b^2 = -1 \Rightarrow b^2 + b - 2 = 0 \Rightarrow (b + 2)(b - 1) = 0, \text{ either } b = -2 \text{ يهمل}$$

$$b = 1 \Rightarrow a = 1 + 1 = 2$$

$$f''(x) = 2a - 2, \quad a = 2 \Rightarrow f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow (-2, 1) \text{ نهاية صغرى محلية}$$

1999 دور 2

إذا كانت  $f(x) = x^3 - bx^2 + cx$  يمر بالنقطة  $(-2, -2)$  وكان للدالة نقطة انقلاب عند  $x = 1$  جد قيمتي  $b, c \in \mathbb{R}$  ثم جد نقطة النهاية العظمى المحلية له .

**sol :**  $\because (-2, -2) \in f(x) \Rightarrow f(-2) = -2, \because x=1 \text{ انقلاب} \Rightarrow f''(1) = 0$

$$-8 - 4b - 2c = -2 \dots (1)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2bx + c, \quad f''(x) = 6x - 2b$$

$$\because f''(1) = 0 \Rightarrow 6 - 2b = 0 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \quad (1) \text{ نعوض في المعادلة}$$

$$-8 - 12 - 2c = -2 \Rightarrow -2c = 18 \Rightarrow c = -9$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow [3x^2 - 6x - 9 = 0] \div (3)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x = 3, f(3) = 27 - 27 - 27 = -27 \text{ OR } x = -1, f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$$

نقاط حرجة  $(3, -27), (-1, 5)$

$$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(3) = 18 - 6 = 12 > 0, \quad f''(-1) = -6 - 6 = -12 < 0$$

نقطة نهاية عظمى محلية  $(-1, 5)$  , نقطة نهاية صغرى محلية  $(3, -27)$



2014 دور 1

إذا كان منحنى الدالة  $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$  ممس لمقر لكل  $x < 1$  ومحدب لكل  $x > 1$  يمس المستقيم  $y + 9x = 28$  عند  $x = 3$  جد قيم  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

sol :  $x = 3 \Rightarrow y + 27 = 28 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (3, 1)$  نقطة تماس

$$f(3) = 1 \Rightarrow 27a + 9b + c = 1 \quad (1)$$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-9}{1} = -9 \text{ ميل المستقيم}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f'(3) = 27a + 6b$$

$$f'(3) = m \Rightarrow 27a + 6b = -9 \quad (2)$$

$$f''(x) = 6ax + 2b, f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \quad (3)$$

$$2b = -6a \Rightarrow b = -3a \quad \text{تعوض في (2)}$$

$$27a + (6)(-3a) = -9 \Rightarrow 27a - 18a = -9 \Rightarrow 9a = -9 \Rightarrow a = -1$$

$$b = (-3)(-1) = 3 \quad \text{تعوض في المعادلة (1)}$$

$$-27 + 27 + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

إذا كان منحنى الدالة  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$  ممس لمقر لكل  $x < 1$  ومحدب لكل  $x > 1$  ويمس المستقيم  $y + 9x = 28$  عند  $x = 3$  جد قيم  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2000 دور 2

تلميح || في هذا السؤال يمكن حله بدون الاستفادة من نقطة الانقلاب أي من خلال المعادلتين 1, 2 فقط وإذا اضيف مجهول آخر للسؤال فيكون  $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$  فيجب الاستفادة من المعادلات الثلاث معا.

إذا كان المستقيم  $y + 9x = 28$  يمس المنحنى  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$  عند  $(3, 1)$  جد قيم  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2009 دور 2

sol :  $m = \frac{-a}{b} = \frac{-9}{1} = -9$  ميل المستقيم  $\therefore (3, 1)$  نقطة تماس  $\Rightarrow f(3) = 1, f'(3) = m$

$$27a + 9b + 1 = 1 \Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a \quad (1)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f'(3) = 27a + 6b$$

$$\Rightarrow 27a + 6b = -9 \quad (2) \Rightarrow 27a - 18a = -9 \Rightarrow 9a = -9 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 3$$



إذا علمت ان للدالة  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  نهاية عظمى محلية عند  $x = -2$  ونهاية صغرى محلية عند  $x = 4$  جد قيمتي  $a, b$ .

2001 دور 1

**sol :**  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$f'(-2) = 0, f'(4) = 0$$

$$12 - 4a + b = 0 \dots\dots (1)$$

تعوض في (1)  $b = -48 - 8a \Rightarrow 2 \dots\dots$

$$12 - 4a - 48 - 8a = 0 \Rightarrow -12a = 36 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = -48 + 24 = -24$$

إذا علمت ان للدالة  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  نهاية عظمى محلية عند  $x = -1$  ونهاية صغرى محلية عند  $x = 2$  جد قيمتي  $a, b$ .

2012 دور 1

2013 دور 2

2008 خارج

2015 نازحين

**sol :**  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$f'(-1) = 0, f'(2) = 0$$

$$3 - 2a + b = 0 \dots\dots (1)$$

تعوض في (1)  $b = -12 - 4a \Rightarrow 2 \dots\dots$

$$3 - 2a - 12 - 4a = 0 \Rightarrow -6a = 9 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow b = -12 - 4(-\frac{3}{2}) = -12 + 6 = -6$$

لتكن  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 6$  جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه.

2003 دور 1

**sol:**  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 + 3 + 9 - 6 = 5$$

$$(-1, 5) \text{ نقطة انقلاب وتماس معا} \Rightarrow m = f'(-1) = 3 - 6 - 9 = -12$$

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \text{ معادلة المماس} \Rightarrow (y - 5) = -12(x + 1)$$

$$y - 5 = -12x - 12 \Rightarrow 12x + y + 7 = 0 \text{ معادلة المماس المطلوبة}$$



إذا كان المستقيم  $3x - y = 7$  يمس المنحى  $f(x) = ax^2 + bx + c$  عند النقطة  $(2, -1)$  وكانت له نهاية صغرى محلية عند  $x = \frac{1}{2}$  جد قيم  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

لأنها صغرى  $f'(\frac{1}{2}) = 0$  , لأنها تماس  $f'(2) = m$  , لأنها تماس  $f(2) = -1$  : sol

$$m = -\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$(2, -1) \in f(x) \Rightarrow 4a + 2b + c = -1 \quad (1)$$

$$f'(x) = 2ax + b, \quad \therefore f'(2) = m \Rightarrow 4a + b = 3 \quad (2)$$

تعويض في المعادلة (2)  $\Rightarrow a = -b$   $\therefore f'(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow a + b = 0$  .....

تعويض قيمتيهما في المعادلة (1)  $-4b + b = 3 \Rightarrow -3b = 3 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1$

$$4 - 2 + c = -1 \Rightarrow c = -3$$

إذا كان المستقيم  $3x - y = 7$  يمس المنحى  $f(x) = ax^2 + bx + c$  عند النقطة  $(2, -1)$  وكانت له نهاية صغرى محلية عند  $x = 5$  جد قيم  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

2015 4 راحة

إذا كان منحنى الدالة  $f(x) = 2ax^2 + b$  وكانت  $a \in \{-1, 0, 1, 3\}$  تمتلك نهاية عظمى محلية جد قيمة  $a$ .

2004 دور 1

sol:  $f'(x) = 4ax \Rightarrow f''(x) = 4a$

$a = -1 \Rightarrow f''(x) = -4 < 0$  تمتلك نهاية عظمى محلية

جد معادلة المنحى  $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx$  حيث ان النقطة  $(-1, 4)$  نقطة انقلاب له وميل المماس عندها يساوي (1).

2004 دور 2

خريطة عمل [ لأنها انقلاب  $f''(-1) = 0$  , لأنها تماس  $f'(-1) = 1$  , لأنها تماس  $f(-1) = 4$  ] : sol

$$(-1, 4) \in f(x) \Rightarrow -a - b - c = 4 \quad (1)$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c \Rightarrow 3a + 2b + c = 1 \quad (2)$$

$$2a + b = 5 \quad (3)$$

$$f''(x) = 6ax - 2b \Rightarrow -6a - 2b = 0 \quad (4 \Rightarrow 2b = -6a \Rightarrow b = -3a \text{ (in 3)})$$

$$2a - 3a = 5 \Rightarrow -a = 5 \Rightarrow a = -5 \Rightarrow b = 15 \text{ (in 1)}$$

$$5 - 15 - c = 4 \Rightarrow -c = 14 \Rightarrow c = -14$$

$$f(x) = -5x^3 - 15x^2 - 14x$$

2014 دور 3

2016 دور 2 خارج



2005 دور 2

جد نقطة الانقلاب للمنحني  $f(x) = (x-2)(x+1)^2$  ثم جد معادلة المماس له عند نقطة انقلابه

$$\text{sol: } f(x) = (x-2)(x^2+2x+1)$$

$$f'(x) = (x-2)(2x+2) + (x^2+2x+1)(1) = 2x^2+2x-4x-4 + x^2+2x+1 = 3x^2-3$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -2 \Rightarrow (0, -2) \text{ نقطة الانقلاب}$$

$$m = f'(x) = f'(0) = -3$$

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \text{ معادلة المماس } \Rightarrow (y + 2) = -3(x - 0) \Rightarrow 3x + y + 2 = 0$$

2006 تمهيدي

إذا علمت ان للدالة  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  نهاية صغرى محلية عند  $x = 4$  ونقطة انقلاب عند  $x = 1$  جد قيمتي  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2008 دور 2

$$\text{sol: } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(4) = 0$$

$$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(1) = 0$$

$$48 + 8a + b = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \text{ نعوض في (1)}$$

$$48 - 24 + b = 0 \Rightarrow b = -24$$

2005 دور 1

لتكن  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$  وكانت  $(-1, 2)$  نهاية عظمى محلية للدالة جد قيمتي  $c, d \in \mathbb{R}$  هل توجد نقطة انقلاب للدالة.

$$\text{sol: } f(-1) = 2, f'(-1) = 0 \text{ خطة عمل النقطة الحرجة}$$

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1 \Rightarrow 2 = -1 + b - c + 1 \Rightarrow b - c = 2 \dots\dots(1)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow 0 = 3 - 2b + c \Rightarrow c = 2b - 3 \dots\dots(2) \text{ in (1)}$$

$$b - (2b - 3) = 2 \Rightarrow b - 2b + 3 = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow c = 2 - 3 = -1$$

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{-1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{-1+3+9+27}{27} = \frac{38}{27} \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}, \frac{38}{27}\right) \text{ نقطة انقلاب مرشحة}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \text{ إشارة المشتقة الثانية } \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}, \frac{38}{27}\right) \text{ نقطة انقلاب}$$

2007 دور 1

إذا كانت  $f(x) = ax^3 + bx^2$  جد قيمتي  $a, b \in \mathbb{R}$  إذا علمت ان للمنحني نقطة انقلاب  $(1, 2)$ 

$$\text{sol: } f(1) = 2 \Rightarrow 2 = a + b \dots\dots\dots (1)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx, f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \dots\dots\dots (2 \Rightarrow b = -3a \text{ نعوض في (1)})$$

$$2 = a - 3a \Rightarrow 2 = -2a \Rightarrow a = -1 \text{ in (2)} \Rightarrow b = 3$$



إذا كانت  $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$  حيث  $a \in \mathbb{R} ; a, x \neq 0$  بين ان الدالة لاتملك نهاية عظمى محلية مهما كانت قيمة  $a$ .

2008 دور 1

2015 دور 3

**sol :**  $f'(x) = 2x - ax^{-2} \Rightarrow 2x - \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{a}{x^2}$

$$2x^3 = a \Rightarrow x^3 = \frac{a}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

$$f''(x) = 2 + 2ax^{-3} = 2 + \frac{2a}{x^3} \Rightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right) = 2 + \frac{2a}{\frac{a}{2}} = 2 + (2a)\left(\frac{2}{a}\right) = 2 + 4 = 6 > 0$$

الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية ولا يمكن ان تمتلك نهاية عظمى محلية .:

إذا كانت  $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$  حيث  $a \in \mathbb{R} ; a, x \neq 0$  بين ان الدالة لاتملك نهاية عظمى محلية مهما كانت قيمة  $a$ .

2013 دور 1

نفس اسلوب حل السؤال السابق بفرق اشارة قيمة  $x$

إذا كان المستقيم  $x - y + 2 = 0$  يمس منحنى القطع المكافئ  $y^2 = hx$  جد بؤرة القطع المكافئ.

2008 دور 2

**sol :**  $m_{\text{المستقيم}} = -\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = -\frac{-a}{b} = \frac{-1}{-1} = 1$

ميل المماس للمنحنى (إذا مس او وازى مستقيم منحنى تساوى ميلاهما)  $2yy' = h \Rightarrow y' = \frac{h}{2y}$

تعويض بمعادلة المستقيم (1)  $\frac{h}{2y} = 1 \Rightarrow h = 2y \Rightarrow y = \frac{h}{2}$

(نعوض المعادلتين 1 ، 2 بمعادلة القطع المكافئ)  $x - \frac{h}{2} + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{h}{2} - 2$  (2)

$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = h\left(\frac{h}{2} - 2\right) \Rightarrow \left[\frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{2} - 2h\right] \cdot (4) \Rightarrow h^2 = 2h^2 - 8h \Rightarrow h^2 - 8h = 0$

$h(h - 8) = 0 \Rightarrow h = 0$  يهمل OR  $h = 8$

بؤرة القطع المكافئ  $(2, 0) \Rightarrow p = 2 \Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow$  معادلة القطع المكافئ  $y^2 = 8x$  ,  $y^2 = 4px$



2012 دور 3

إذا كانت  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$  وكانت  $f$  مقعرة لكل  $x > 1$  ومحدبة لكل  $x < 1$  والدالة  $f$  نقطة نهاية عظمى محلية  $(-1, 5)$  فجد قيم الثوابت  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

خريطة عمل [ لانها انقلاب  $f''(1) = 0$  , لانها عظمى  $f'(-1) = 0$  , لانها عظمى  $f(-1) = 5$  ] **sol :**

$$\because (-1, 5) \in f(x) \Rightarrow -a + b - c = 5 \quad (1)$$

2015 دور 1

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \because f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0 \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} -a + b - c = 5 \quad (1) \\ 3a - 2b + c = 0 \quad (2) \end{array} \right\} \text{ بالجمع}$$

$$\hline 2a - b = 5 \quad (3)$$

2016 دور 1 في

$$f''(x) = 6ax + 2b, \because f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \quad (4)$$

$$2b = -6a \Rightarrow b = -3a \quad (\text{تعوض في المعادلة رقم 3})$$

$$2a + 3a = 5 \Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -3 \quad (\text{تعوض قيمتهما في المعادلة 1})$$

$$-1 - 3 - c = 5 \Rightarrow c = -9$$

إذا كانت 6 تمثل نهاية صفري محلية لمنحني الدالة  $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$  فجد قيمة  $c$  ثم جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه.

2012 خارج القطر

**sol :**  $y = 6$

$$f'(x) = 6x - 3x^2 \Rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(2 - x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{OR} \quad x = 2$$

$$f''(x) = 6 - 6x \Rightarrow f''(0) = 6 - 0 = 6 > 0, f''(2) = 6 - 12 = -6 < 0$$

$$(0, 6) \in f(x) \text{ هي نقطة النهاية الصفري}$$

$$6 = 0 - 0 + c \Rightarrow c = 6 \Rightarrow f(x) = 3x^2 - x^3 + 6 \Rightarrow f'(x) = 6x - 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6 - 6x$$

$$6 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 3 - 1 + 6 = 8 \Rightarrow (1, 8) \text{ انقلاب مرشحة}$$

$$\xrightarrow{\text{++++++ (1) -----}}$$

$$\therefore (1, 8) \text{ نقطة انقلاب}$$

Mob: 07902162268

109

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



نكن  $f(x) = ax^2 - 6x + b$  حيث ان  $a \in \{-4, 8\}$  جد قيمة  $a$  اذا كانت الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية .

2013 تمهيدي

**sol:**  $f'(x) = 2ax - 6 \Rightarrow f''(x) = 2a$

$a = 8 \Rightarrow f''(x) = 16 > 0$  الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية

إذا كانت  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$  ،  $g(x) = 1 - 12x$  وكان كل من  $f, g$  متماسان عند نقطة الانقلاب وكانت للدالة  $f$  نقطة انقلاب هي  $(-11, 1)$  فجد قيم الثوابت  $a, b, c \in \mathbb{R}$

2014 دور 2

خريطة عمل [ لانها انقلاب  $f''(1) = 0$  , لانها تماس  $f'(1) = m$  , لانها تماس وانقلاب  $f(1) = -11$  ]

$\therefore f(1) = -11 \Rightarrow a + b + c = -11$  ..... (1)

$m = g'(x) = -12$  ,  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\therefore f'(1) = m \Rightarrow 3a + 2b + c = -12$  ..... (2)

$\mp a \mp b \mp c = \pm 11$  ..... (1)

$2a + b = -1$  .....(4)

$f''(x) = 6ax + 2b$  ,  $\therefore f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$  ..... (3)

$2b = -6a \Rightarrow b = -3a$  (تعويض في المعادلة 4)

$2a - 3a = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -3$  (تعويض قيمتهما في المعادلة 1)

$1 - 3 + c = -11 \Rightarrow c = -9$

ملاحظة || يمكن اعتبار المستقيم  $g(x) = 1 - 12x$  بالصورة  $y = 1 - 12x$  ثم حساب ميله عن طريق قانون ميل المستقيم ويصبح  $m = -12$  بعد ان نجعل المتغيرين  $x, y$  بنفس الجهة علما ان الطالب مخير بين استخدام المشتقة او قانون ميل المستقيم

إذا كان للدالة  $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$  نهاية عظمى محلية تساوي (8) ونقطة انقلاب عند  $x = 1$  جد قيمتي  $a, c \in \mathbb{R}$  .

2015 دور 2 خارج

2015 دور 2 داخل

**sol:**  $y = 8$

$f'(x) = 3ax^2 + 6x \Rightarrow 3ax^2 + 6x = 0$  ..... (1)

$f''(x) = 6ax + 6 \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 6 = 0 \Rightarrow 6a = -6 \Rightarrow a = -1$  (تعويض في المعادلة 1)

$-3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$  OR  $x = 2$

$f''(x) = -6x + 6 \Rightarrow f''(0) = 6 > 0$  ,  $f''(2) = -12 + 6 = -6 < 0$

$\Rightarrow$  نقطة النهاية العظمى المحلية (2, 8)  $f(2) = 8$

$-8 + 12 + c = 8 \Rightarrow c = 4$



## الاسئلة الوزارية الخاصة بالتطبيقات العلمية

خطوات

- (1) نفرض المتغيرات باسماء معينة.
- (2) ايجاد علاقة بين المتغيرات بالاستفادة من أي عدد في السؤال لجعل احد المتغيرات بدلالة الآخر .
- (3) كتابة القاعدة (الدالة ) الملازمة لكلمة اكبر او اصغر او احدى مرادفاتها .
- (4) وضع القاعدة ( الدالة ) بدلالة متغير واحد بالاستفادة من الخطوة (2) ، أي دمج (2) مع (3) .
- (5) اشتقاق القاعدة ثم مساواتها بالصفر ثم حل المعادلة لإيجاد قيمة المتغير الموحد .
- (6) الرجوع الى الخطوتين (2) ثم (1) والتعويض عن المعلوم لإيجاد المجهول .
- (7) عرض النتائج على خط الاعداد او المشتقة الثانية للتأكد من كون الناتج اكبر او اصغر مايمكن علما ان اغلب الاسئلة يتم اختيار القيمة المطلوبة الناتجة من الخطوة (5) ذهنيادون الحاجة الى الخطوة (7)

1997 دور 2

في ظل الحصار الجائر المفروض على قطرنا المناضل صمم عامل بناء مبدع نموذجاً لصندوق بضاعة على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل ومن غير غطاء فإذا كان حجمه  $\frac{1}{16} m^3$  جد ابعاد الصندوق لتكون مساحة المادة المستخدمة في صناعته اقل مايمكن .

الحل | نفرض ان طول ضلع القاعدة يساوي  $x$  ونفرض ان الارتفاع يساوي  $h$   
حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

لاحظ انه جعلنا  $h$  بدلالة  $x$  لكي نتجنب جذر الطرفين

$$V = x^2 h \Rightarrow \frac{1}{16} = x^2 h \Rightarrow 16x^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{16x}$$

المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة  
ولأن الصندوق بدون غطاء لذا سوف نحذف الضعف من القانون وعليه سوف يكون

المساحة السطحية للصندوق = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = محيط القاعدة  $\times$  الارتفاع + مساحة القاعدة

$$A = 4xh + x^2 \Rightarrow A = 4x \frac{1}{16x^2} + x^2 \Rightarrow A = \frac{1}{4} x^{-1} + x^2$$

$$A' = -\frac{1}{4} x^{-2} + 2x, \therefore A' = 0$$

$$-\frac{1}{4} x^{-2} + 2x = 0 \Rightarrow \left[ \frac{-1}{4x^2} + 2x = 0 \right] \cdot 4x^2 \Rightarrow -1 + 8x^3 = 0 \Rightarrow 8x^3 = 1$$

$$x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \therefore h = \frac{1}{16x^2} = \frac{1}{16(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{16 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

اي ان طول ضلع القاعدة المربعة يساوي  $\frac{1}{2} m$  وارتفاع الصندوق يساوي  $\frac{1}{4} m$

وللتحقق من صحة الحل نحيل النتائج المستخرجة على خط الاعداد للمشتقة الاولى او المشتقة الثانية للتأكد من كونه اكبر (عظمي) اصغر (صغرى) مايمكن

$$A'' = \frac{1}{2} x^{-3} + 2 = \frac{1}{2x^3} + 2 \Rightarrow A''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{8}} + 2 = 6 > 0 \text{ (اقل مايمكن)}$$

Mob: 07902162268

111

اعدادية الكاظمية للبنين



حاوية على هيئة اسطوانة دائرية قائمة حجمها  $216 \pi \text{ cm}^3$  جد ابعادها اذا كانت مساحة المعن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن ، مع العلم ان الحاوية مفتوحة من الاعلى .

1998 دور 1

2016 دور 2

الحل :- نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة =  $x$  ، نفرض ان ارتفاع الاسطوانة =  $h$   
 حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع  
 $V = \pi x^2 h$

$$216\pi = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{216}{x^2}$$

المساحة السطحية (بدون غطاء) = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المساحة السطحية (بدون غطاء) = محيط القاعدة  $\times$  الارتفاع + مساحة القاعدة

$$A = 2\pi x h + \pi x^2$$

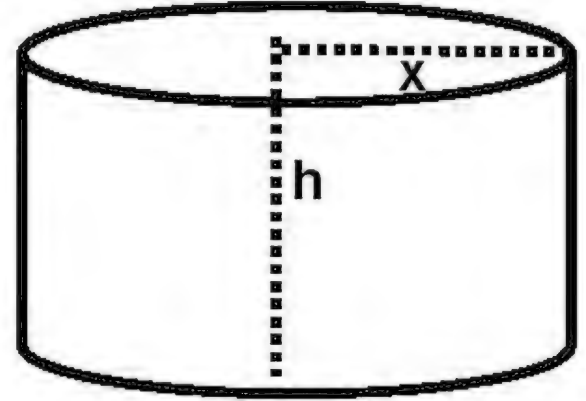
$$A = 2\pi x \left(\frac{216}{x^2}\right) + \pi x^2 \Rightarrow A = \pi (432 x^{-1} + x^2)$$

$$A' = \pi (-432 x^{-2} + 2x)$$

$$\left[\frac{-432}{x^2} + 2x = 0\right] \cdot x^2 \Rightarrow -432 + 2x^3 = 0$$

$$2x^3 = 432 \Rightarrow x^3 = 216$$

$$x = 6 \text{ cm} \text{ ارتفاعها } h = \frac{216}{6} = 6 \text{ cm} \text{ نصف قطر قاعدتها}$$



خزان من الحديد ذو غطاء كامل على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وحجمه  $216 \text{ m}^3$  جد ابعاده لتكون مساحة الصفائح المستخدمة في صنعه اقل ما يمكن .

2000 دور 2

الحل | نفرض ان طول ضلع القاعدة يساوي  $x$  ونفرض ان الارتفاع يساوي  $h$

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$V = x^2 h \Rightarrow 216 = x^2 h \Rightarrow h = \frac{216}{x^2}$$

المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

المساحة السطحية للخزان = محيط القاعدة  $\times$  الارتفاع +  $2 \times$  مساحة القاعدة

$$A = 4xh + 2x^2 \Rightarrow A = 4x \frac{216}{x^2} + 2x^2 \Rightarrow A = 864 x^{-1} + 2x^2$$

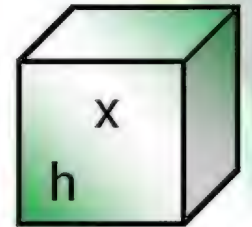
$$A' = -864 x^{-2} + 4x, \therefore A' = 0$$

$$-864 x^{-2} + 4x = 0 \Rightarrow \left[\frac{-864}{x^2} + 4x = 0\right] \cdot x^2$$

$$\Rightarrow -864 + 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x^3 = 864$$

$$x^3 = 216 \Rightarrow x = 6 \quad \therefore h = \frac{216}{x^2} = \frac{216}{36} = 6$$

اي ان طول ضلع القاعدة المربعة يساوي  $6 \text{ m}$  وارتفاع الصندوق يساوي  $6 \text{ m}$  اي ان الشكل مكعبا





وللتحقق من صحة الحل نحيل النتائج المستخرجة على خط الاعداد للمشتقة الاولى او المشتقة الثانية للتأكد من كونه اكبر (عظمى) اصغر (صغرى) مايمكن

$$A'' = 1728x^{-3} + 4 = \frac{1728}{x^3} + 4 \Rightarrow A''(6) = \frac{1728}{216} + 4 = 12 > 0 \text{ (اقل مايمكن)}$$

1999 دور 2

اذا كان نصف قطر كرة يساوي نصف قطر قاعدة اسطوانة دائرية قائمة وكان مجموع حجمى الكرة والاسطوانة يساوي  $90\pi \text{ cm}^3$  جد طول نصف قطر الكرة عندما يكون مجموع مساحتيهما الكلية اصغر مايمكن .

الحل | نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة يساوي نصف قطر الكرة ويساوي  $r$  ، نفرض ارتفاع الاسطوانة  $h$  حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع ، حجم الكرة =  $\frac{4\pi}{3} (\text{نصف القطر})^3$

$$[90\pi = \pi r^2 h + \frac{4\pi}{3} r^3] \cdot \frac{3}{\pi} \Rightarrow 270 = 3r^2 h + 4r^3$$

$$3r^2 h = 270 - 4r^3 \Rightarrow h = \frac{270 - 4r^3}{3r^2} \Rightarrow h = \frac{270}{3r^2} - \frac{4r^3}{3r^2} \Rightarrow h = 90r^{-2} - \frac{4}{3}r$$

المساحة السطحية للاسطوانة  $A_1 = \text{المساحة الجانبية} + 2 \times \text{مساحة القاعدة}$

المساحة السطحية للكرة  $A_2 = 4\pi r^2$

$$A = A_1 + A_2 = (2\pi r h + 2\pi r^2) + 4\pi r^2 = 2\pi r h + 6\pi r^2$$

$$A = 2\pi (r h + 3r^2) \Rightarrow A = 2\pi [r(90r^{-2} - \frac{4}{3}r) + 3r^2]$$

$$A = 2\pi [90r^{-1} - \frac{4}{3}r^2 + 3r^2]$$

$$A' = 2\pi [-90r^{-2} - \frac{8}{3}r + 6r] , A' = 0$$

$$2\pi [-90r^{-2} - \frac{8}{3}r + 6r] = 0 \Rightarrow -90r^{-2} - \frac{8}{3}r + 6r = 0$$

$$[-\frac{90}{r^2} - \frac{8}{3}r + 6r = 0] \cdot 3r^2 \Rightarrow -270 - 8r^3 + 18r^3 = 0$$

$$10r^3 = 270 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \text{ cm} \text{ نصف قطر كل من الكرة والاسطوانة}$$



2002 دور 2

2015 خارج 1

خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل وله غطاء كامل ، جد ابعاد الخزان لتكون مساحة المادة المستعملة في صناعته اقل مايمكن علما ان سعة الخزان  $27 m^3$

الحل | نفرض ان طول ضلع القاعدة يساوي  $x$  ونفرض ان الارتفاع يساوي  $h$   
حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$V = x^2 h \Rightarrow 27 = x^2 h \Rightarrow h = \frac{27}{x^2}$$

المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة  
المساحة السطحية للخزان = محيط القاعدة  $\times$  الارتفاع +  $2 \times$  مساحة القاعدة

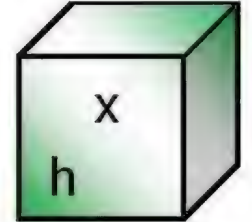
$$A = 4xh + 2x^2 \Rightarrow A = 4x \frac{27}{x^2} + 2x^2 \Rightarrow A = 108 x^{-1} + 2x^2$$

$$A' = -108 x^{-2} + 4x, \therefore A' = 0$$

$$-108 x^{-2} + 4x = 0 \Rightarrow \left[ \frac{-108}{x^2} + 4x = 0 \right] \cdot x^2$$

$$\Rightarrow -108 + 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x^3 = 108$$

$$x^3 = 27 \Rightarrow x = 3 \quad \therefore h = \frac{27}{x^2} = \frac{27}{9} = 3$$



اي ان طول ضلع القاعدة المربعة يساوي  $3 m$  وارتفاع الصندوق يساوي  $3 m$  اي ان الشكل مكعبا  
وللتحقق من صحة الحل نحيل النتائج المستخرجة على خط الاعداد للمشتقة الاولى او المشتقة الثانية للتأكد من كونه اكبر (عظمى) اصغر (صغرى) مايمكن

$$A'' = 216 x^{-3} + 4 = \frac{216}{x^3} + 4 \Rightarrow A''(3) = \frac{216}{27} + 4 = 12 > 0 \text{ (اقل مايمكن)}$$

جد بعدي علبة اسطوانة دائرية قائمة مسدودة من نهايتها ، مساحتها السطحية  $24\pi cm^2$  عندما يكون حجمها اكبر مايمكن .

2001 دور 1

الحل | نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة  $r$  وارتفاعها  $h$   
حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

2004 دور 2

المساحة السطحية للأسطوانة = المساحة الجانبية +  $2 \times$  مساحة القاعدة

المساحة السطحية للأسطوانة = (محيط القاعدة  $\times$  الارتفاع) +  $2 \times$  مساحة القاعدة

$$[24\pi = 2\pi rh + 2\pi r^2] \div 2\pi \Rightarrow 12 = rh + r^2 \Rightarrow rh = 12 - r^2$$

$$h = \frac{12 - r^2}{r}$$

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot \left( \frac{12 - r^2}{r} \right) = \pi (12r - r^3)$$

$$V' = \pi (12 - 3r^2), \quad V' = 0 \Rightarrow \pi (12 - 3r^2) = 0 \Rightarrow 3r^2 = 12$$

$$r^2 = 4 \Rightarrow r = 2 cm \quad \Rightarrow h = \frac{12 - 4}{2} = 4 cm \text{ ارتفاع الاسطوانة}$$

وللتحقق من صحة الحل نعرض النتائج على المشتقة الثانية ويجب ان تكون اشارتها موجبة اي ان النهاية عظمى

$$V'' = \pi (-6r) \Rightarrow V''(2) = -12\pi < 0 \text{ اي ان الحجم يكون اكبر مايمكن}$$



2004 دور 1

قطعة سلك طولها 8 cm قطعت الى قطعتين صنع من الاولى دائرة ومن الثانية مستطيل طوله ضعف عرضه ، جد طول كل قطعة ليكون مجموع مساحتي المستطيل والدائرة اقل مايمكن .

الحل | نفرض ان طول المستطيل x وعرضه y بحيث ان  $x = 2y$  ونفرض ان نصف قطر الدائرة r بما ان طول قطعة السلك 8 امتار وقطعت الى قطعتين فإن مجموع محيطي القطعتين هي نفسها طول السلك وعليه تكون العلاقة في السؤال هي مجموع المحيطين والقاعدة التي يتم اشتقاقها مجموع المساحتين

$$2(2y + y) + 2\pi r = 8 \Rightarrow 6y + 2\pi r = 8 \Rightarrow 3y + \pi r = 4$$

$$3y = 4 - \pi r \Rightarrow y = \frac{1}{3} (4 - \pi r)$$

$$A = 2y(y) + \pi r^2 \Rightarrow A = \frac{2}{9} (4 - \pi r)^2 + \pi r^2 \Rightarrow A = \frac{2}{9} (16 - 8\pi r + \pi^2 r^2) + \pi r^2$$

$$A' = \frac{2}{9} (-8\pi + 2\pi^2 r) + 2\pi r \Rightarrow [\frac{2}{9} (-8\pi + 2\pi^2 r) + 2\pi r = 0] \cdot \frac{9}{2\pi}$$

$$-8 + 2\pi r + 9r = 0 \Rightarrow r(2\pi + 9) = 8 \Rightarrow r = \frac{8}{2\pi + 9}$$

$$y = \frac{1}{3} \left( 4 - \frac{8\pi}{2\pi + 9} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{8\pi + 36 - 8\pi}{\pi + 9} \right) = \frac{12}{2\pi + 9}$$

$$6y = \frac{72}{2\pi + 9} \text{ محيط المستطيل والذي يمثل طول القطعة الاولى}$$

$$2\pi r = \frac{16\pi}{2\pi + 9} \text{ محيط الدائرة والذي يمثل طول القطعة الثانية}$$

$$A'' = \frac{2}{9} (2\pi^2) + 2\pi > 0 \text{ ( اصغر مايمكن ) اي ان مجموعة المساحتين في نهايته الصغرى}$$

مجموع محيطي دائرة ومربع 60 cm اثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين اصغر مايمكن فان طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع .

2013 دور 3

2015 دور 3

الحل :- نفرض ان طول ضلع المربع = x ، نفرض ان طول نصف قطر الدائرة = y العلاقة مجموع المحيطين والقاعدة مجموع المساحتين

$$4x + 2\pi y = 60 \Rightarrow 2x + \pi y = 30 \Rightarrow 2x = 30 - \pi y \Rightarrow x = 15 - \frac{\pi}{2} y$$

$$A = x^2 + \pi y^2 \Rightarrow A = (15 - \frac{\pi}{2} y)^2 + \pi y^2 \Rightarrow A = 225 - 15\pi y + \frac{\pi^2}{4} y^2 + \pi y^2$$

$$A' = -15\pi + \frac{\pi^2}{2} y + 2\pi y \Rightarrow [-15\pi + \frac{\pi^2}{2} y + 2\pi y = 0] \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$-30 + \pi y + 4y = 0 \Rightarrow (4 + \pi) y = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{(4 + \pi)}$$

$$x = 15 - \frac{\pi}{2} \left( \frac{30}{(4 + \pi)} \right) = 15 - \frac{15\pi}{(4 + \pi)} = \frac{15\pi + 60 - 15\pi}{(4 + \pi)} \Rightarrow x = \frac{60}{(4 + \pi)}$$

$$2y = x = \frac{60}{(4 + \pi)} \text{ أي ان}$$

$$A'' = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi > 0 \text{ اي ان للدالة نهاية صغرى محلية والجواب هو اصغر مايمكن}$$

تلميح || يمكنك ان تراجع اسلوب حل الكتاب للمثال حيث بدأ الحل بأن يجعل نصف القطر بدلالة طول ضلع المربع ، حاول نك قبل ان تطلع على حل الكتاب .



برهن ان اكبر مستطيل محيطه 40 cm يكون مربعا

2005 تمهيدي

الحل | نفرض ان بعدي المستطيل  $x, y$ 

$$40 = 2(x + y) \Rightarrow 20 = x + y \Rightarrow x = 20 - y \quad \text{محيط المستطيل} = 2 \text{ (الطول + العرض)}$$

$$A = x \cdot y$$

مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض

$$A = (20 - y) y = 20y - y^2$$

$$A' = 20 - 2y, \quad A' = 0 \Rightarrow 20 - 2y = 0 \Rightarrow y = 10$$

بما ان البعدين متساويين فإن المستطيل المطلوب مربعا  $x = 20 - 10 = 10$ اي ان المستطيل يكون مربعا عندما يكون في نهايته العظمى ( مساحته اكبر ما يمكن )  $A'' = -2 < 0$ 

جد ابعاد مستطيل محيطه 100 سم ومساحته اكبر ما يمكن .

2010 تمهيدي

الحل | نفرض ان بعدي المستطيل  $x, y$ 

$$100 = 2(x + y) \Rightarrow 50 = x + y \Rightarrow x = 50 - y \quad \text{محيط المستطيل} = 2 \text{ (الطول + العرض)}$$

$$A = x \cdot y$$

مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض

$$A = (50 - y) y = 50y - y^2$$

$$A' = 50 - 2y, \quad A' = 0 \Rightarrow 50 - 2y = 0 \Rightarrow y = 25\text{cm}$$

بما ان البعدين متساويين فإن المستطيل المطلوب مربعا  $x = 50 - 25 = 25\text{cm}$ اي ان المستطيل يكون مربعا عندما يكون في نهايته العظمى ( مساحته اكبر ما يمكن )  $A'' = -2 < 0$ 

تلميح || لو وجدت قطعة ارض مستطيلة الشكل يحدها نهر من احدى جهاتها واريد تسييجها بسياج طوله 100 متر مثلا فالحصول على اكبر مساحة لهذا المستطيل تكون العلاقة ( محيط المستطيل ناقص ضلع  $100 = 2x + y$  )

جد اقل محيط ممكن لمستطيل مساحته  $16 \text{ cm}^2$ 

2005 دور 1

2006 دور 2

2014 تمهيدي

الحل || نفرض ان طول المستطيل  $x$  ، عرض المستطيل  $y$ 

$$16 = x y \Rightarrow y = \frac{16}{x}$$

مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض

$$P = 2(x + y)$$

محيط المستطيل =  $2 \times (\text{الطول} + \text{العرض})$ 

$$P = 2\left(x + \frac{16}{x}\right) = 2\left(x + 16x^{-1}\right)$$

$$P' = 2\left(1 - 16x^{-2}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$y = \frac{16}{4} = 4$$

$$P = 2(4 + 4) = 16 \text{ cm}$$

اي ان المحيط في نهايته الصغرى ( اقل محيط ممكن )  $p''(4) = 1 > 0$ 

$$p'' = 2(32x^{-3}) = \frac{64}{x^3}$$



2005 دور 2

صفحة مستوية معدنية مربعة الشكل طول ضلعها 60 cm قطعت من أركانها الأربعة مربعات متساوية المساحة ثم تثبت الأجزاء البارزة لتكون علبة بدون غطاء احسب طول ضلع المربع المقطوع لكي يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن .

الحل :- نفرض ان طول ضلع المربع المقطوع =  $x$   
بعد تثبي الأجزاء البارزة تكونت علبة على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة طول ضلع القاعدة يساوي  $60 - 2x$  وارتفاعها يساوي  $x$   
حجم متوازي المستطيلات  $V =$  مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$V = (60 - 2x)^2 \cdot x$$

$$V = (3600 - 240x + 4x^2) \cdot x$$

$$V = 3600x - 240x^2 + 4x^3$$

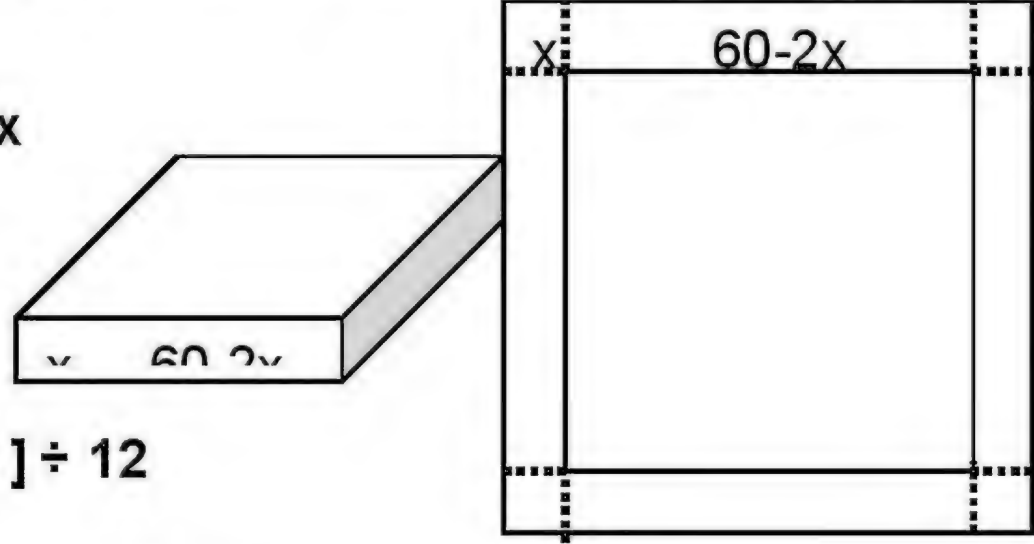
$$V' = 3600 - 480x + 12x^2$$

$$[ 3600 - 480x + 12x^2 = 0 ] \div 12$$

$$300 - 40x + x^2 = 0 \Rightarrow (30 - x)(10 - x) = 0$$

( طول ضلع المربع المقطوع )  $x = 10$  OR ( يهمل ذهنيا ) اما  $x = 30$

الحجم أكبر ما يمكن  $V'' = -480 + 24x \Rightarrow V''(10) = -480 + 240 = -240 < 0$



صفحة مستوية معدنية مستطيلة الشكل بعديها 80 cm , 50 cm قطعت من أركانها الأربعة مربعات متساوية المساحة ثم تثبت الأجزاء البارزة لتكون علبة بدون غطاء احسب طول ضلع المربع المقطوع لكي يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن .

2009 تمهيدي

الحل | نفرض ان طول ضلع المربع المقطوع  $x$

في العلبة الناتجة يكون طول ضلع القاعدة  $80 - 2x$  وعرضها  $50 - 2x$  وارتفاعها  $x$   
حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$V = (80 - 2x)(50 - 2x)(x) = (4000 - 160x - 100x + 4x^2) x$$

$$= (4000 - 260x + 4x^2) x = (4000x - 260x^2 + 4x^3)$$

$$V' = 4000 - 520x + 12x^2, V' = 0 \Rightarrow [4000 - 520x + 12x^2 = 0] \div 4$$

$$1000 - 130x + 3x^2 = 0 \Rightarrow (100 - 3x)(10 - x) = 0$$

طول ضلع المربع المقطوع  $x = 10$  cm OR يهمل ذهنيا لانه أكبر من نصف العرض  $x = \frac{100}{3}$  either

الحجم أكبر ما يمكن  $V'' = -520 + 24x \Rightarrow V''(10) = -520 + 240 < 0$



2007 تمهيدي

جد العدد الذي زيادته على مربعه اكبر مايمكن

الحل :- نفرض العدد  $x$  ومربعه  $x^2$ 

$$h = x - x^2$$

$$h' = 1 - 2x \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

العدد الناتج هو اكبر مايمكن  $\Rightarrow h'' = -2 < 0$ 

عزيزي الطالب | قد يحور السؤال السابق ليكون جد العدد الذي نقصانه على مربعه اصغر مايمكن فتكون القاعدة  $h = x^2 - x$  عندها ستكون المشتقة الثانية في نهايتها الصغرى

جد العدد الذي اذا اضيف الى نظيره الضربي يكون الناتج اكبر مايمكن

الحل | نفرض ان العدد  $x$  ونظيره الضربي  $\frac{1}{x}$ 

2014 دور 3

2013 خارج القطر

$$A = x + \frac{1}{x} \Rightarrow A = x + x^{-1}$$

$$A' = 1 - x^{-2} \Rightarrow [1 - \frac{1}{x^2} = 0] \cdot x^2 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$A'' = 2x^{-3} \Rightarrow A'' = \frac{2}{x^3}$$

في نهايته الصغرى ( اصغر مايمكن )  $A''(1) = 2 > 0$ في نهايته العظمى ( اكبر مايمكن )  $A''(-1) = -2 < 0$ 

اي ان العدد المطلوب يساوي (-1)

تلميح || هذا الحل هو الذي يعتمد في الجواب النموذجي ومايريده واضع السؤال ولكن السؤال لا يخلو من خلل لغوي لان الاختبار اظهر ان العدد 1- هو اكبر عدد مطلوب لكن عند اجراء اختبار على العدد 1 مثلا نجد ان ناتج اضافته الى نظيره الضربي ينتج عنه 2 وهو اكبر من ناتج اضافة 1- الى نظيره الضربي وهو 2- وان كل الاعداد الموجبة الاخرى تظهر نتائج اكبر من ذلك لذا فان السؤال بوضعه اللفظي الحالي يخالف المنطق الرياضي ولتدارك هذا الخلل يجب ان يكون السؤال باحدى الصيغتين التاليتين

جد اكبر عدد سالب عند اضافته الى نظيره الضربي يكون الناتج في نهايته العظمى  
جد اصغر عدد موجب عند اضافته الى نظيره الضربي يكون الناتج في نهايته الصغرى



جد العددين الموجبين اللذين مجموعهما 75 وحاصل ضرب احدهما في مربع الاخر اكبر مايمكن  
الحل :- نفرض العدد الاول  $x$  ونفرض العدد الثاني  $y$

2014 دور 4 انبار

$$x + y = 75 \Rightarrow x = 75 - y$$

$$h = x y^2 \Rightarrow h = (75 - y) y^2 = 75y^2 - y^3$$

$$h' = 150y - 3y^2 \Rightarrow 150y - 3y^2 = 0 \Rightarrow 3y(50 - y) = 0$$

$$y = 0 \text{ يهمل OR } y = 50$$

$$x = 75 - 50 = 25 \Rightarrow \{50, 25\} \text{ العدان هما}$$

$$h'' = 150 - 6y \Rightarrow h''(50) = 150 - 300 = -150 < 0 \Rightarrow \text{الجواب يمثل اكبر مايمكن}$$

لتكن  $y^2 = 8x$  جد نقطة تنتمي الى المنحني وتكون اقرب مايمكن الى النقطة  $(6,0)$ .  
الحل :- نفرض النقطة  $p(x, y)$

2002 دور 1

$$y^2 = 8x \Rightarrow$$

$$P = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 0)^2}$$

$$P = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2}$$

$$P = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + 8x} = \sqrt{x^2 - 4x + 36}$$

$$P' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+36}} \Rightarrow \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+36}} = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$$

$$\{(2, 4), (2, -4)\} \text{ مجموعة الحل}$$

اذا كان  $y + 4x = 24$  فجد قيمتي  $y, x$  التي تجعل  $y x^2$  اكبر مايمكن.

2008 تمهيدي

$$y + 4x = 24 \Rightarrow y = 24 - 4x$$

$$A = y x^2$$

$$A = (24 - 4x)x^2 \Rightarrow A = 24x^2 - 4x^3$$

$$A' = 48x - 12x^2 \Rightarrow 12x(4 - x) = 0$$

$$\text{either } x = 0 \text{ تهمل}$$

$$\text{or } x = 4 \Rightarrow y = 24 - 16 = 8$$

$$A'' = 48 - 24x \Rightarrow A''(4) = 48 - 96 = -48 \text{ اي ان القيم الناتجة في نهايتها العظمى}$$



جد نقطة او اكثر تنتمي الى القطع الزائد  $y^2 - x^2 = 3$  بحيث تكون اقرب مايمكن الى النقطة (0,4)

2011 دور 2

2013 دور 1

2012 تمهيدي

2015 دور 2 في

2016 دور 2 في

نفرض النقطة  $p(x, y)$ 

$$y^2 - x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = y^2 - 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y^2 - 3}$$

$$P = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 4)^2}$$

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16}$$

$$P = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16} = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$$

$$P' = \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} \Rightarrow \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} = 0 \Rightarrow 4y-8=0 \Rightarrow y=2$$

$$x = \pm \sqrt{4-3} \Rightarrow x = \pm 1$$

مجموعة الحل  $\{(1, 2), (-1, 2)\}$ 

جد نقطة تنتمي الى المنحني  $y^2 - x^2 = 5$  لكي تكون اقرب مايمكن من النقطة (4, 0)

2015 دور 2

ans: المنحني  $\in (2, 3), (2, -3)$ 

جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بمنحني الدالة  $f(x) = 12 - x^2$  ومحور السينات بحيث ان رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الآخران على محور السينات ثم جد محيطه .

2012 دور 2

2007 خارج القطر

حل :- نفرض ان العرض  $= 2x$  والطول  $= y$  (لأن المنحني متناظر حول محور الصادات)

$$y = 12 - x^2$$

$$A = 2x \cdot y$$

مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض

$$A = 2x(12 - x^2) \Rightarrow A = 24x - 2x^3$$

$$A' = 24 - 6x^2 \Rightarrow 24 - 6x^2$$

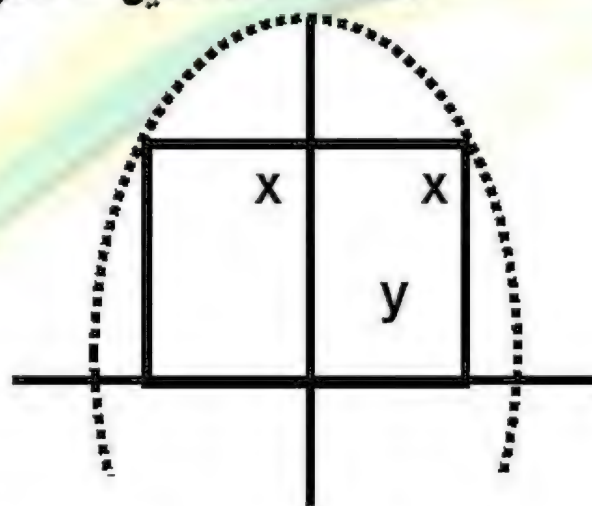
$$6x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 12 - 4 \Rightarrow y = 8$$

$$2x = 4 \text{ العرض , } y = 8 \text{ الطول}$$

$$M = (y + 2x) \cdot 2 \text{ محيط المستطيل } = 2 \times (\text{الطول} + \text{العرض})$$

$$M = (8 + 4) (2) = 24 \text{ وحدة طول}$$



من || مثلث متساوي الساقين abc فيه  
bc يوازي محور السينات من الاعلى ،  
تقع على نقطة الاصل ، c ، b ينتميان الى  
المنحني  $y = 12 - x^2$  جد اكبر مساحة  
لمثلث المثلث .  
الجواب || {16} وحدة مربعة



جد ابعاد اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية اكبر مايمكن موضوعة داخل كرة مجوفة

1999 دور 1

صف قطرها  $6\sqrt{2} \text{ cm}$ الحل :- نفرض ان نصف قطر الاسطوانة  $x$  ، نفرض ارتفاع الاسطوانة  $2h$ 

$$(6\sqrt{2})^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow 72 = x^2 + h^2$$

$$x^2 = 72 - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{72 - h^2}$$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$A = 2\pi x (2h) = 4\pi xh$$

$$A = 4\pi h\sqrt{72 - h^2} \Rightarrow A = 4\pi \sqrt{h^2}\sqrt{72 - h^2}$$

$$A = 4\pi \sqrt{72h^2 - h^4}$$

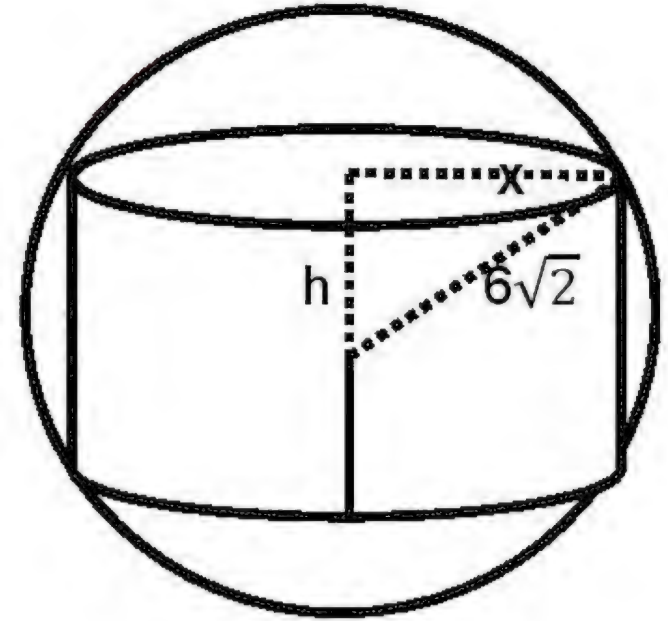
$$A' = 4\pi \frac{144h - 4h^3}{2\sqrt{72h^2 - h^4}} \Rightarrow 4\pi \frac{144h - 4h^3}{2\sqrt{72h^2 - h^4}} = 0$$

$$144h - 4h^3 = 0 \Rightarrow 4h(36 - h^2) = 0$$

$$h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$$

$$x^2 = 72 - 36 = 36 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow 2h = 12$$
 ارتفاع الاسطوانة

تلميح || لاحظ ان القاعدة التي تم اشتقاقها هي المساحة الجانبية للاسطوانة ، فلو كان السؤال جد المساحة الجانبية لأكبر اسطوانة دائرية توضع داخل كرة نصف قطرها  $6\sqrt{2}$  لكانت القاعدة قانون حجم الاسطوانة وبعد ايجاد الابعاد نعوضها بقانون المساحة الجانبية

جد بعدي اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مجوفة طول نصف قطرها  $2\sqrt{3} \text{ cm}$ 

2001 دور 2

الحل :- نفرض ان نصف قطر الاسطوانة  $x$  ، نفرض ارتفاع الاسطوانة  $2h$ 

$$(2\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow 12 = x^2 + h^2$$

$$x^2 = 12 - h^2$$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$V = \pi x^2 (2h) = 2\pi x^2 h$$

$$V = 2\pi h(12 - h^2) \Rightarrow V = 2\pi (12h - h^3)$$

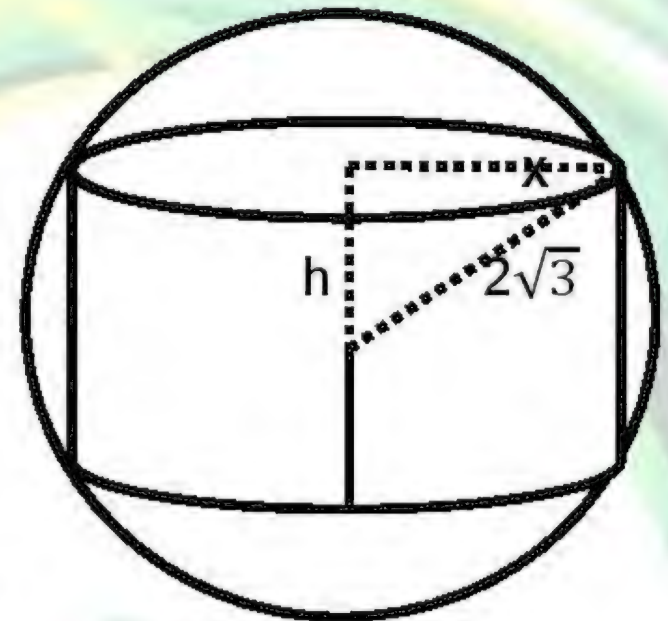
$$V' = 2\pi (12 - 3h^2) \Rightarrow 2\pi (12 - 3h^2) = 0$$

$$12 - 3h^2 = 0 \Rightarrow 3h^2 = 12 \Rightarrow h^2 = 4 \Rightarrow h = 2$$

$$x^2 = 12 - 4 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$
 نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$$2h = 4$$
 ارتفاع الاسطوانة

تلميح || لو طلب ايجاد بعدي اكبر اسطوانة يمكن وضعها داخل كرة نصف قطرها معلوم عندها سنفرض ان نصف قطر الكرة  $a$  ونكمل الحل حسب ماتقدم ويكون الجواب النهائي بدلالة  $a$



Mob: 07902162268

121

اعدادية الكاظمية للبنين



جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مجوفة طول نصف قطرها

2012 دور 3

$4\sqrt{3} \text{ cm}$

الحل :- نفرض ان نصف قطر الاسطوانة  $x$  ، نفرض ارتفاع الاسطوانة  $2h$

$$(4\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow 48 = x^2 + h^2$$

$$x^2 = 48 - h^2$$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$V = \pi x^2 (2h) = 2\pi x^2 h$$

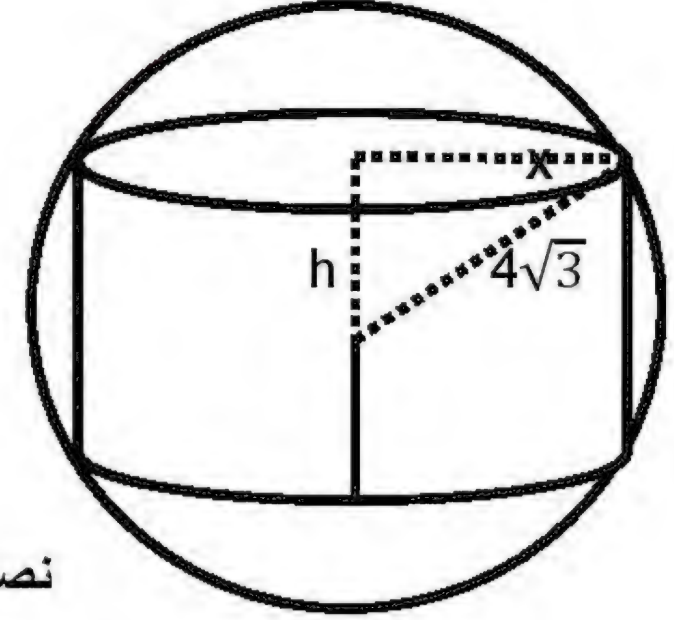
$$V = 2\pi h(48 - h^2) \Rightarrow V = 2\pi (48h - h^3)$$

$$V' = 2\pi (48 - 3h^2) \Rightarrow 2\pi (48 - 3h^2) = 0$$

$$48 - 3h^2 = 0 \Rightarrow 3h^2 = 48 \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4$$

$$x^2 = 48 - 16 = 32 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$$
 نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$$2h = 8$$
 ارتفاع الاسطوانة



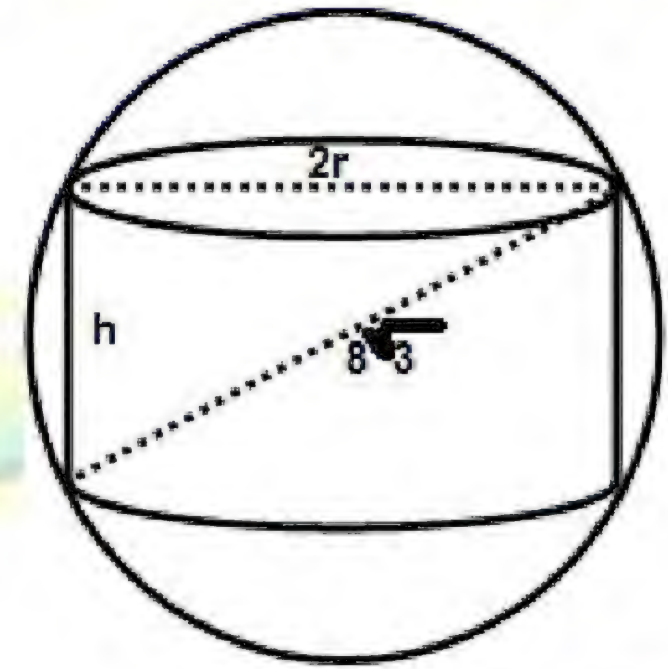
تأكيد || اكبر اسطوانة توضع داخل كرة يكون مركز الكرة منصف لارتفاع الاسطوانة وعليه فرضنا الارتفاع  $2h$  لاننا سنحتاج الى احد القسمين لرسم المثلث القائم الزاوية . ويمكن استبدال الرسم بالشكل التالي فتتغير الفرضية

في هذه الحالة نبقى الارتفاع  $h$  لان القطر الكامل هو الذي يكون المثلث القائم وعليه ستكون العلاقة في السؤال

$$128 = h^2 + (2r)^2 \Rightarrow 128 = h^2 + 4r^2$$

$$r^2 = \frac{1}{4} (128 - h^2)$$

$$v = \pi r^2 h$$
 اكمل الحل وسترى نفس النتائج





2008 دور 1

جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة مجوفة نصف قطرها 3 cm .

ان نصف قطر قاعدة المخروط x ، ارتفاع المخروط h

$$9 = x^2 + (h - 3)^2 \Rightarrow 9 = x^2 + h^2 - 6h + 9$$

$$x^2 = 6h - h^2$$

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 h$$

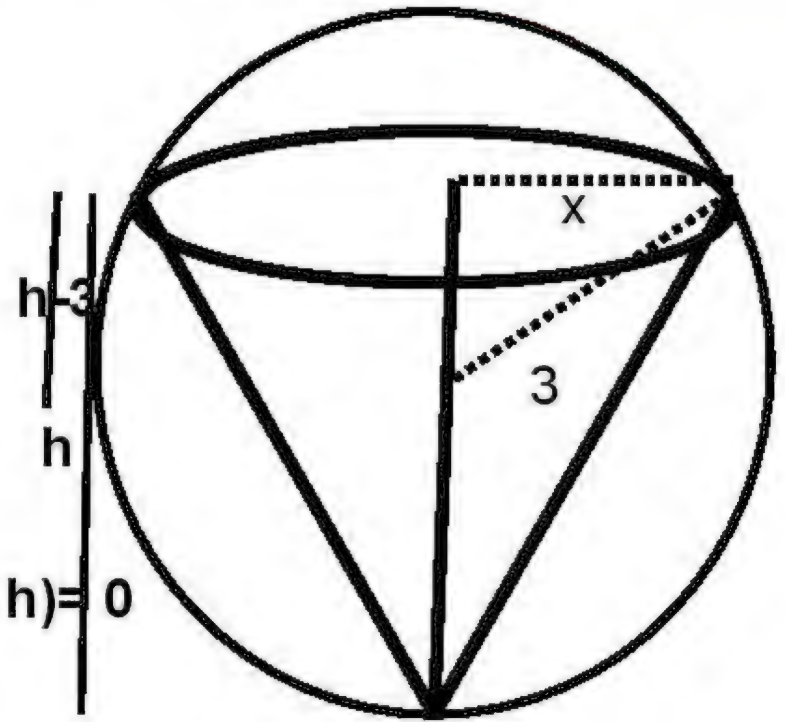
$$V = \frac{\pi}{3} (6h - h^2) h \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} (6h^2 - h^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3} (12h - 3h^2) = 0 \Rightarrow 12h - 3h^2 = 0 \Rightarrow 3h(4 - h) = 0$$

either h = 0 يهمل

$$\text{OR } h = 4 \Rightarrow x^2 = 24 - 16 = 8$$

$$V = \frac{\pi}{3} (8)(4) = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$$



جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه 8√2 cm .

2016 تمهيدي

الحل :- نفرض ان طول القاعدة = 2x ، الارتفاع = y

$$(8\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 128 = x^2 + y^2$$

$$x^2 = 128 - y^2 \Rightarrow x = \sqrt{128 - y^2}$$

$$A = \frac{1}{2} 2x \cdot y \quad \text{مساحة المثلث} = \text{نصف طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$A = y \sqrt{128 - y^2} \Rightarrow A = \sqrt{y^2} \sqrt{128 - y^2} \Rightarrow A = \sqrt{128y^2 - y^4}$$

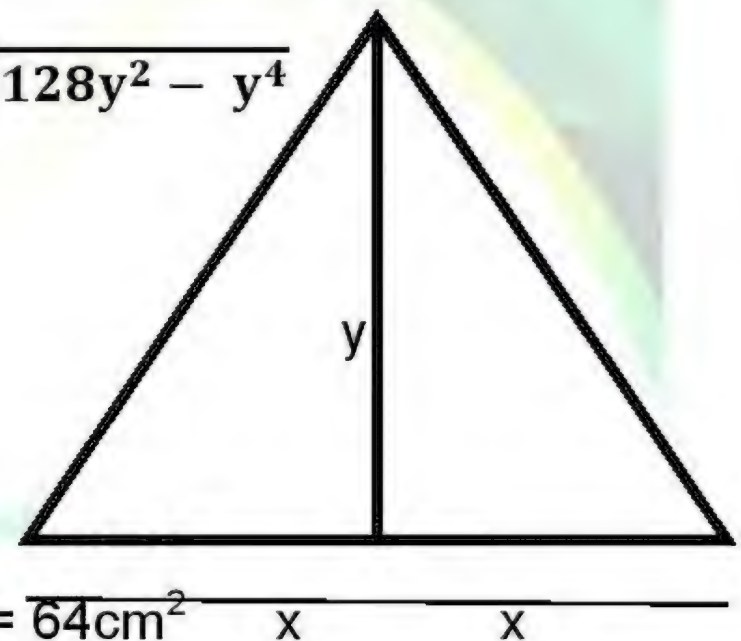
$$A' = \frac{(256y - 4y^3)}{2\sqrt{128y^2 - y^4}} = 0$$

$$256y - 4y^3 = 0 \Rightarrow 4y(64 - y^2) = 0$$

$$4y = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{يهمل} \quad \text{OR } y^2 = 64 \Rightarrow y = 8$$

$$x = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} \Rightarrow x = 8$$

$$2x = 16 \text{ cm} \quad \text{طول القاعدة} , y = 8 \text{ cm} \quad \text{الارتفاع} , A = 64 \text{ cm}^2$$



Mob: 07902162268

123

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



ند مساحة اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها 6 cm .

2003 دور 1

2006 تمهيدي

2010 دور 2

الحل :- نفرض ان طول قاعدة المثلث =  $2x$  ، ارتفاع المثلث =  $h$

$$(6)^2 = x^2 + (h - 6)^2$$

$$36 = x^2 + h^2 - 12h + 36$$

$$x^2 = 12h - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{12h - h^2}$$

$$A = \frac{1}{2} (2x) (h) \quad \text{مساحة المثلث} = \text{نصف القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$A = h \sqrt{12h - h^2}$$

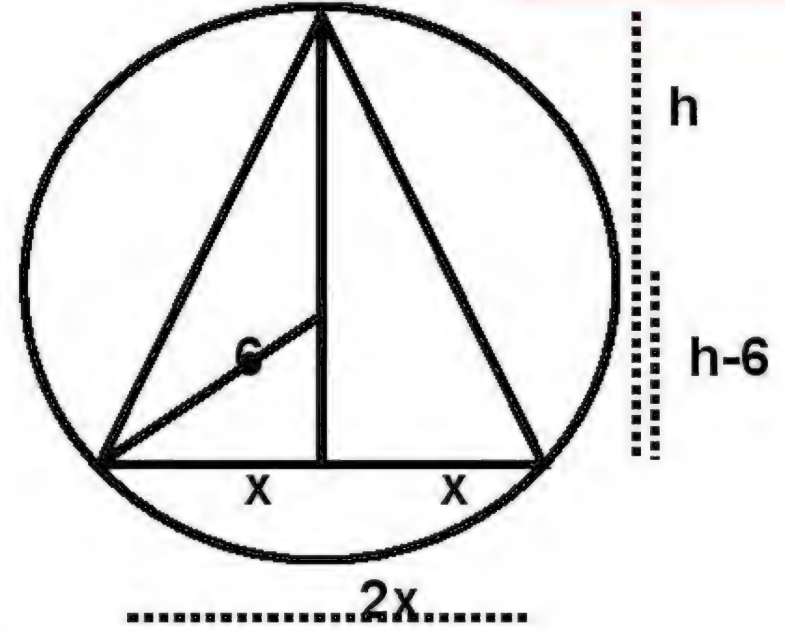
$$A = \sqrt{h^2} \sqrt{12h - h^2} = \sqrt{12h^3 - h^4} ; h > 0$$

$$A' = \frac{36h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} = 0 \Rightarrow 36h^2 - 4h^3 = 0 \Rightarrow 4h^2(9 - h) = 0$$

$$4h^2 = 0 \Rightarrow h = 0 \quad \text{يهمل} \quad \text{OR} \quad 9 - h = 0 \Rightarrow h = 9 \text{ cm}$$

$$x = \sqrt{108 - 81} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow 2x = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm} \quad \text{طول القاعدة}$$

$$A = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



ند بعدي اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن وضعه داخل دائرة نصف قطرها 12 cm نفس فكرة السؤال السابق

2012 خارج النظر



2011 دور 1

2014 دور 1

مثث قائم الزاوية طول وتره  $6\sqrt{3} \text{ cm}$  ادير حول احد ضلعيه القائمين فتكون مخروط دائري قائم ، جد طولي الضلعين القائمين بحيث يكون حجم المخروط المتكون اكبر ما يمكن .

الحل :- عدد دوران المثث القائم حول احد اضلاعه القائمة فان الشكل المتكون هو مخروط نصف قطر قاعدته وارتفاعه هما الضلعين القائمين  
نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط =  $x$  ، ارتفاع المخروط =  $h$

$$(6\sqrt{3})^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow 108 = x^2 + h^2$$

$$x^2 = 108 - h^2$$

حجم المخروط = ثلث مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 h$$

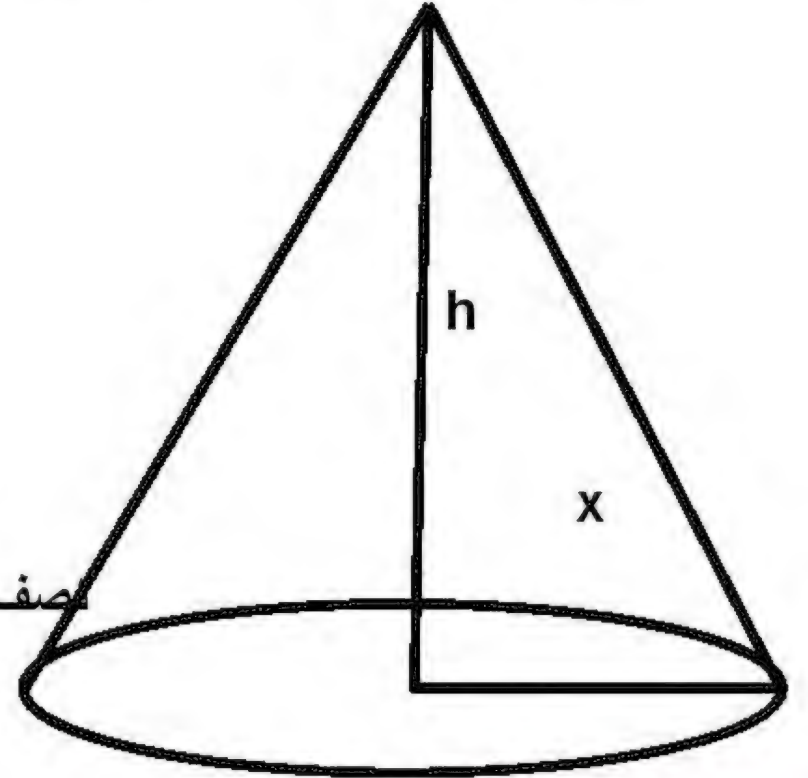
$$V = \frac{\pi}{3} h (108 - h^2) \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} (108h - h^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3} (108 - 3h^2) \Rightarrow \frac{\pi}{3} (108 - 3h^2) = 0$$

$$108 - 3h^2 = 0 \Rightarrow 3h^2 = 108 \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$$

$$x^2 = 108 - 36 = 72 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$$
 نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$$V = \frac{\pi}{3} (72)(6) \Rightarrow V = 144\pi \text{ cm}^3$$



خروط دائري قائم طول مولده  $9\sqrt{3} \text{ cm}$  جد ارتفاع هذا المخروط لكي يكون حجمه اكبر مايمكن

2006 دور 1

مثث قائم الزاوية طول وتره  $4\sqrt{3} \text{ cm}$  ادير حول احد ضلعيه القائمين فتكون مخروط دائري قائم ، جد طولي الضلعين القائمين بحيث يكون حجم المخروط المتكون اكبر ما يمكن .

2009 دور 2

تلميح || فكرة هذا السؤال تردت في اربع نماذج وزارية باختلاف طول المولد او الوتر في المثث القائم مع التأكيد ان المثث القائم الزاوية اذا ادير حول احد ضلعيه القائمين فان الشكل المتكون هو مخروط اما المربع اذا ادير حول احد اضلاعه الاربعة فان الشكل المتكون هو اسطوانة ارتفاعها يساوي طول نصف قطر قاعدتها ، اما المستطيل اذا ادير حول احد اضلاعه فان الشكل المتكون هو اسطوانة .



جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها  $4\sqrt{2}\text{cm}$

2012 دور 1

2013 تمهيدي

لحل :- نفرض ان الطول  $2x$  والعرض  $y$

مركز الدائرة يقسم الطول الى قسمين متساويين ونصف قطر الدائرة يصنع مع البعدين  $x$  ,  $y$  مثلث قائم الزاوية

$$(4\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 32 = x^2 + y^2$$

$$x^2 = 32 - y^2 \Rightarrow x = \sqrt{32 - y^2}$$

مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض  $A = 2x \cdot y$

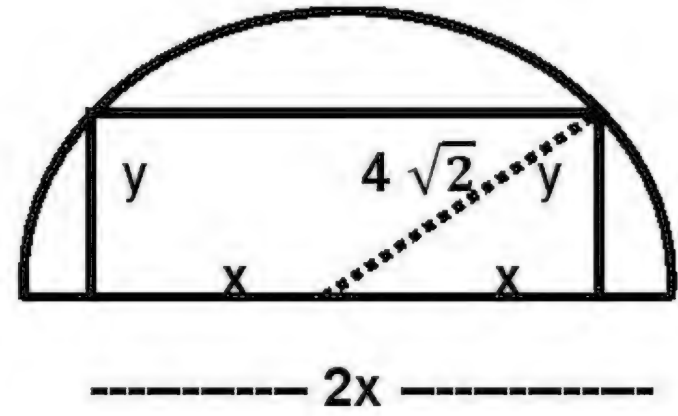
$$A = 2y \sqrt{32 - y^2} \Rightarrow A = 2 \sqrt{y^2} \sqrt{32 - y^2} \Rightarrow A = 2\sqrt{32y^2 - y^4}$$

$$A' = \frac{2(64y - 4y^3)}{2\sqrt{32y^2 - y^4}} = 0$$

$$64y - 4y^3 = 0 \Rightarrow 4y(16 - y^2) = 0$$

$$4y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ يهمل OR } y^2 = 16 \Rightarrow y = 4$$

$$x = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16} \Rightarrow x = 4$$



العرض  $y = 4\text{cm}$  , الطول  $2x = 8\text{cm}$

جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها  $6\text{ cm}$ . نفس الاسلوب

2009 دور 1

2015 دور 4

تأكيد || لو ان المستطيل يرسم داخل دائرة كاملة سنفرض بعديه  $2x$  ,  $2y$  وتكون مساحته

$$A = 2x \cdot 2y = 4xy \text{ ساوي}$$

جد مساحة اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها  $8\text{ cm}$ .

2016 دور 1



1997 دور اول

جد حجم اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8 سم ونصف قطر قاعدته 6 سم .

الحل // نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة x ، ارتفاع الاسطوانة h

من تشابه المثلثين abc , aef

$$\frac{x}{6} = \frac{8-h}{8}$$

$$8x = 6(8 - h) \Rightarrow 4x = 24 - 3h$$

$$3h = 24 - 4x \Rightarrow h = \frac{1}{3}(24 - 4x)$$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة x الارتفاع

$$V = \pi x^2 h \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} (24x^2 - 4x^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3} (48x - 12x^2) \Rightarrow 48x - 12x^2 = 0$$

$$12x(4 - x) = 0$$

$$12x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ يهمل} \quad \text{OR} \quad x = 4 \text{ cm} \Rightarrow h = \frac{1}{3}(24 - 16) = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

المساحة السطحية = محيط القاعدة x الارتفاع + 2 x مساحة القاعدة

$$A = 2\pi x h + 2\pi x^2 = \frac{160}{3}\pi \text{ cm}^2$$

تلميح // السؤال الوزاري الاصلي فيه نصف القطر 9 وارتفاع المخروط 12 تم استبدال القيم لينطبق مع سؤال التمارين في الكتاب المنهجي .

جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه

6cm وطول قطر قاعدته يساوي 8cm .

2015 نازحين 1

الحل // نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة x ، ارتفاع الاسطوانة h

من تشابه المثلثين abc , adf

$$\frac{x}{4} = \frac{6-h}{6}$$

$$6x = 4(6 - h) \Rightarrow 6x = 24 - 4h$$

$$4h = 24 - 6x \Rightarrow h = \frac{1}{2}(12 - 3x)$$

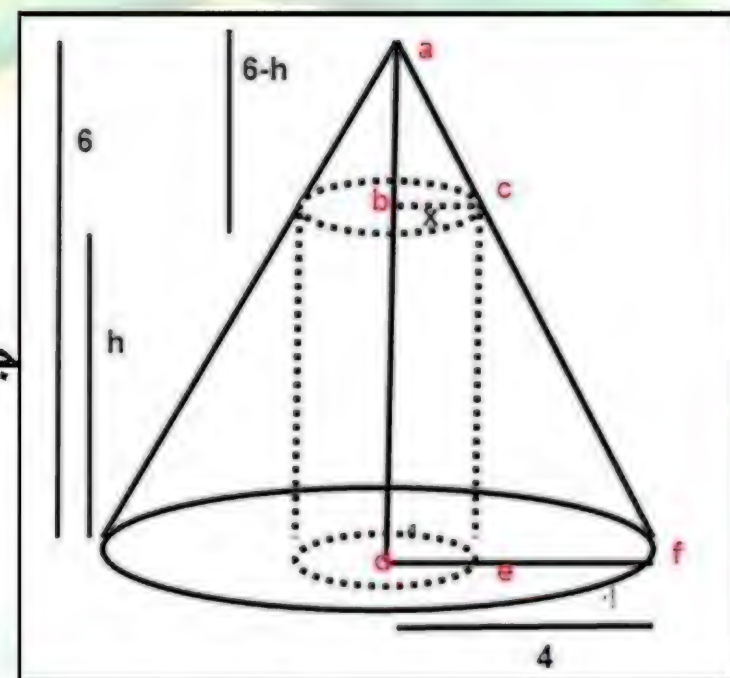
حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة x الارتفاع

$$V = \pi x^2 h \Rightarrow V = \frac{\pi}{2} (12x^2 - 3x^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{2} (24x - 9x^2) \Rightarrow 24x - 9x^2 = 0$$

$$3x(8 - 3x) = 0$$

$$3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ يهمل} \quad \text{OR} \quad x = \frac{8}{3} \text{ cm} \Rightarrow h = \frac{1}{2}(12 - 8) = 2 \text{ cm}$$



Mob: 07902162268

127

اعدادية الكاظمية للبنين



جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 6cm

وطول قطر قاعدته يساوي 10cm .

2016 دور اول

الحل // نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة x ، ارتفاع الاسطوانة h

من تشابه المثلثين abc , adf

$$\frac{x}{5} = \frac{6-h}{6}$$

$$6x = 5(6 - h) \Rightarrow 6x = 30 - 5h$$

$$5h = 30 - 6x \Rightarrow h = \frac{2}{5}(15 - 3x)$$

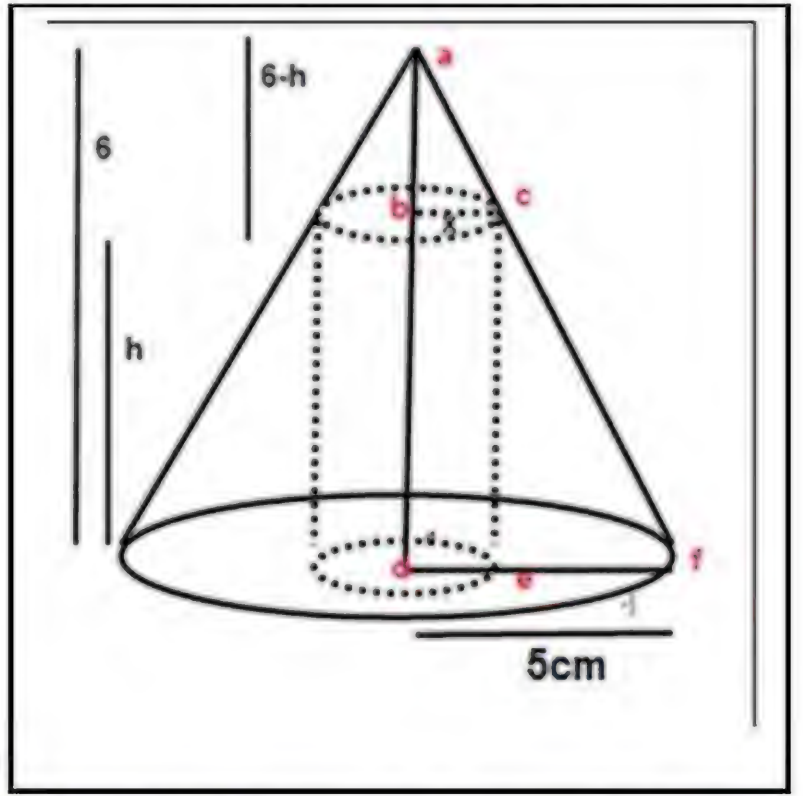
حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة x الارتفاع

$$V = \pi x^2 h \Rightarrow V = \pi x^2 \left[ \frac{2}{5}(15 - 3x) \right] \Rightarrow V = \frac{2\pi}{5} (15x^2 - 3x^3)$$

$$V' = \frac{2\pi}{5} (30x - 9x^2) \Rightarrow 30x - 9x^2 = 0$$

$$3x(10 - 3x) = 0$$

$$3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ يهمل} \quad \text{OR} \quad x = \frac{10}{3} \text{ cm} \Rightarrow h = \frac{2}{5}(15 - 10) = 2 \text{ cm}$$



السؤال منهجي جدا وتم تغيير بسيط في ارتفاع المخروط وطول قطر قاعدته وقد ورد هذا السؤال مرتين في الامتحان الوزاري احدهما نصا من الكتاب والآخر تغيير بسيط في الارقام .

مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 4 cm وارتفاعه 12 cm يراد قطع مخروط دائري منه

2003 دور 2

يرتكز رأسه في مركز قاعدة المخروط الاصلي وقاعدته توازي قاعدة المخروط الاصلي ، جد

ابعاد المخروط المقطوع بحيث يكون حجمه اكبر مايمكن .

الحل // نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة x ، ارتفاع الاسطوانة h

من تشابه المثلثين abc , aef

$$\frac{x}{4} = \frac{12-h}{12}$$

$$12x = 4(12 - h) \Rightarrow 3x = 12 - h$$

$$h = 12 - 3x$$

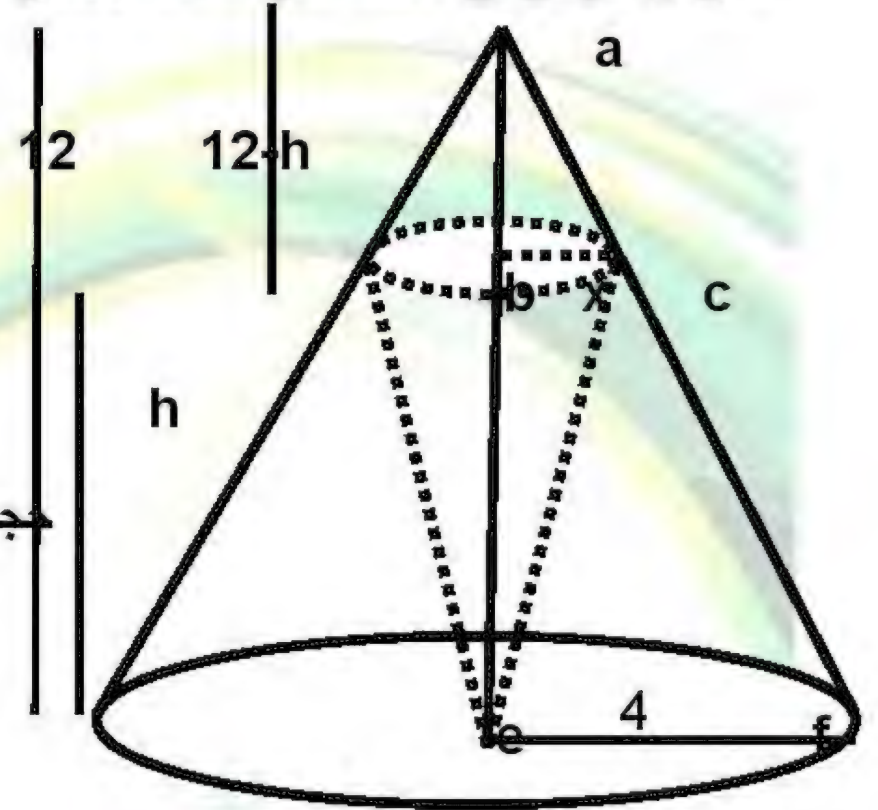
حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة x الارتفاع

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 h \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} x^2 (12 - 3x) \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} (12x^2 - 3x^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3} (24x - 9x^2) \Rightarrow 24x - 9x^2 = 0$$

$$3x(8 - 3x) = 0$$

$$3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ يهمل} \quad \text{OR} \quad x = \frac{8}{3} \text{ cm} \Rightarrow h = (12 - 8) = 4 \text{ cm}$$



Mob: 07902162268

128

اعدادية الكاظمية للبنين



1998 دور 2

ند ابعاد مخروط دائري قائم حجمه اقل مايمكن ويحيط بكرة نصف قطرها 3 سم .

الحل || نفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط = x ، وارتفاعه = h

abc في المثلث

$$(h - 3)^2 = 9 + (ab)^2 \Rightarrow h^2 - 6h + 9 = 9 + (ab)^2$$

$$(ab)^2 = h^2 - 6h \Rightarrow ab = \sqrt{h^2 - 6h}$$

من تشابه المثلثين abc , ade

$$\frac{h}{\sqrt{h^2 - 6h}} = \frac{x}{3} \Rightarrow x \sqrt{h^2 - 6h} = 3h$$

$$x = \frac{3h}{\sqrt{h^2 - 6h}}$$

$$v = \frac{\pi}{3} x^2 h \Rightarrow v = \frac{\pi}{3} h \left( \frac{9h^2}{h^2 - 6h} \right)$$

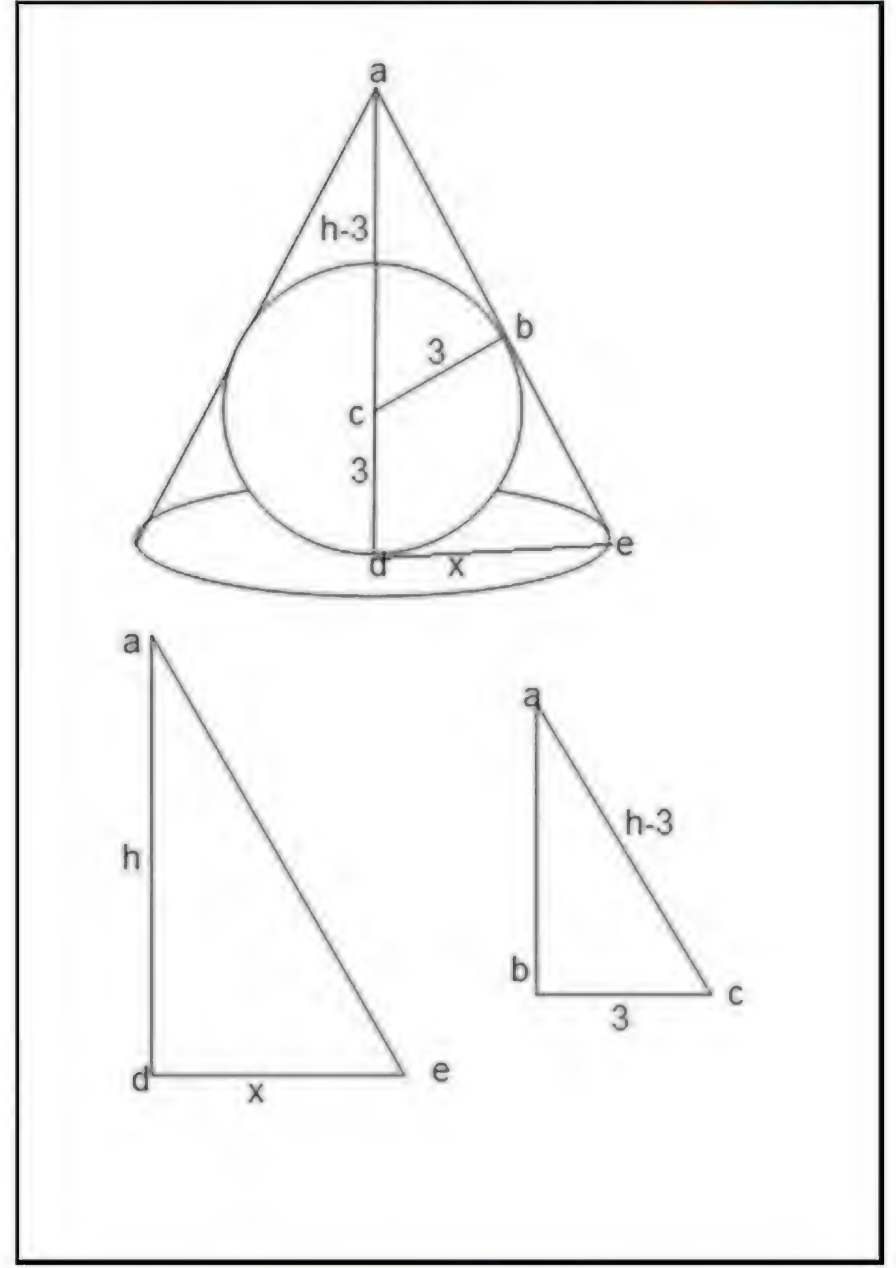
$$v = 3\pi \left( \frac{h^2}{h-6} \right)$$

$$v' = 3\pi \left( \frac{(h-6).2h - h^2.1}{(h-6)^2} \right) = 0$$

$$2h^2 - 12h - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 - 12h = 0$$

$$h(h - 12) = 0 \Rightarrow \text{يهمل } h = 0 \text{ OR } h = 12 \text{ ارتفاع المخروط}$$

$$x = \frac{36}{\sqrt{72}} = \frac{36}{6\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$





بمساحة اصغر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه خارج دائرة نصف قطرها 3 سم .

2008 خارج الخطر

حل || نفرض ان طول قاعدة المثلث =  $2x$  ، وارتفاعه =  $h$

acb في المثلث

$$(h - 3)^2 = 9 + (ac)^2 \Rightarrow h^2 - 6h + 9 = 9 + (ac)^2$$

$$(ac)^2 = h^2 - 6h \Rightarrow ac = \sqrt{h^2 - 6h}$$

من تشابه المثلثين acb , ade

$$\frac{h}{\sqrt{h^2 - 6h}} = \frac{x}{3} \Rightarrow x \sqrt{h^2 - 6h} = 3h$$

$$x = \frac{3h}{\sqrt{h^2 - 6h}}$$

$$A = \frac{1}{2} 2x \cdot h = xh \Rightarrow A = \left( \frac{3h}{\sqrt{h^2 - 6h}} \cdot h \right)$$

$$A = \left( \frac{3h^2}{\sqrt{h^2 - 6h}} \right)$$

$$A' = \frac{\sqrt{h^2 - 6h} \cdot 6h - 3h^2 \cdot \frac{2h-6}{2\sqrt{h^2 - 6h}}}{\sqrt{h^2 - 6h}} = 0$$

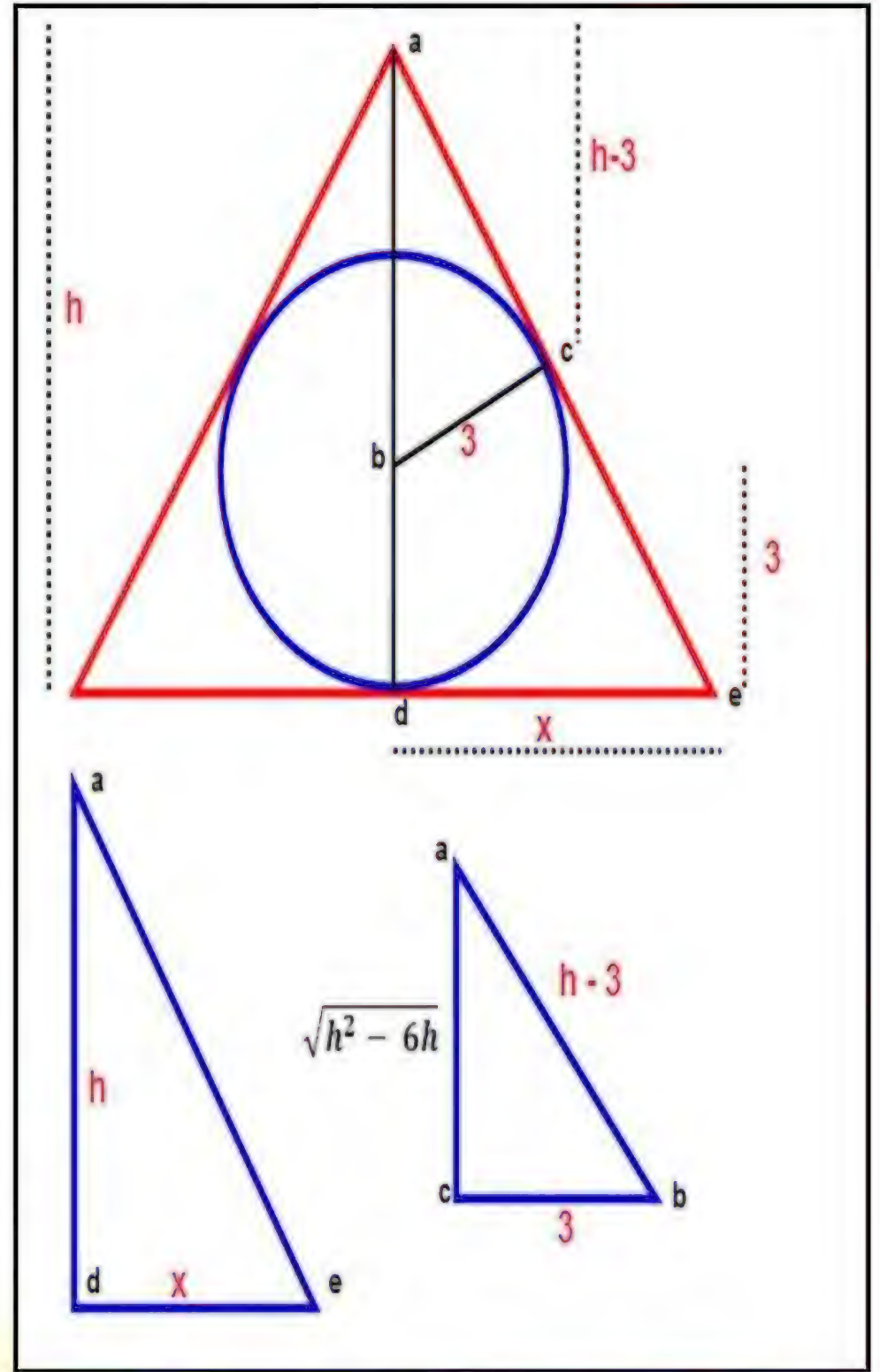
$$[\sqrt{h^2 - 6h} \cdot 6h - 3h^2 \cdot \frac{2h-6}{2\sqrt{h^2 - 6h}} = 0] \cdot 2\sqrt{h^2 - 6h}$$

$$12h(h^2 - 6h) - 3h^2(2h - 6) = 0$$

$$12h^3 - 72h^2 - 6h^3 + 18h^2 = 0$$

$$6h^3 - 54h^2 = 0 \Rightarrow 6h^2(h - 9) = 0 \Rightarrow \text{either } h = 0 \text{ يهمل OR } h = 9 \text{ cm}$$

$$x = \frac{27}{\sqrt{81-54}} = \frac{27}{\sqrt{27}} = 3\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow A = 3\sqrt{3} \cdot 9 = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$$





abc مثلث فيه  $ab = ac$  ،  $ad \perp bc$  ،  $bc = 12 \text{ cm}$  ،  $ad = 20 \text{ cm}$  جد بعدي اكبر  
كبر مستطيل يمكن رسمه داخل هذا المثلث .

2000 دور 1

2007 دور 1 \ جد اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الساقين طول قاعدته 20 سم وارتفاعه 12 سم.

الحل :- نفرض ان بعدي المستطيل  $2x$  ,  $y$

من تشابه المثلثين  $abd$  ,  $aei$

$$\frac{20-y}{20} = \frac{2x}{12} \Rightarrow [40x = 12(20 - y)] \div 4$$

$$10x = 3(20 - y) \Rightarrow x = \frac{3}{10} (20 - y)$$

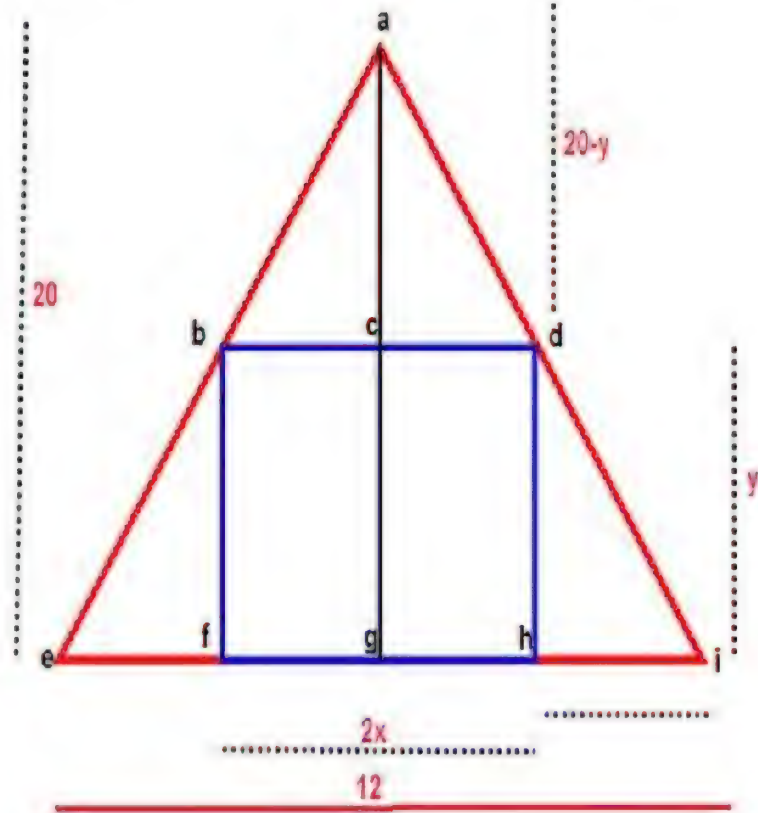
مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض  $A = 2x \cdot y$

$$A = \frac{3}{5} (20 - y) \cdot y = \frac{3}{5} (20y - y^2)$$

$$A' = \frac{3}{5} (20 - 2y) = 0 \Rightarrow 20 - 2y = 0$$

$$y = 10 \text{ cm} \Rightarrow x = \frac{3}{10} (20 - 10) \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

بعدي المستطيل هما  $2x = 6 \text{ cm}$  ,  $y = 10 \text{ cm}$



تلميح 1 || لو علم في المثلث طول كل من الساقين والقاعدة او طول كل من الساقين والارتفاع فيجب احتساب الارتفاع في الحالة الاولى واحتساب القاعدة في الحالة الثانية عن طريق فيثاغورس قبل البدء برسم المستطيل مع التأكيد على ان العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها ، حيث انه لا يمكن ايجاد ابعاد اكبر مستطيل يرسم داخل مثلث الا اذا علم في المثلث طول قاعدته وارتفاعه .

تلميح 2 || لو علم بعدي هذا المستطيل في السؤال وهما 10 , 6 وطلب ايجاد مساحة اصغر مثلث يحيط بهذا المستطيل بحيث ان رأسين من رؤوس المستطيل يقعان على قاعدة المثلث والرأسين الاخرين على ساقيه لفرضنا ان طول قاعدة المثلث  $2x$  والارتفاع  $h$  عندها سينتج من التشابه  $\frac{6}{2x} = \frac{h-10}{h}$  حاول تكمل الحل للحصول على مثلث طول قاعدته 12 سم وطول ارتفاعه 20 سم ... وقتا ممتعا اتمناه لكم .



ند مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الاضلاع ارتفاعه  $(4\sqrt{3} \text{ cm})$

2008 دور 2

الحل :- نفرض ان طول كل من اضلاع المثلث  $2L$  فيكون في المثلث  $agi$

$$(2L)^2 = L^2 + 48 \Rightarrow 4L^2 = L^2 + 48 \Rightarrow 3L^2 = 48 \Rightarrow L^2 = 16 \Rightarrow L = 4 \Rightarrow 2L = 8$$

نفرض ان بعدي المستطيل  $2x, y$

من تشابه المثلثين  $abd, aei$

$$\frac{4\sqrt{3}-y}{4\sqrt{3}} = \frac{2x}{8} \Rightarrow [8\sqrt{3}x = 8(4\sqrt{3}-y)] \div 8$$

$$\sqrt{3}x = (4\sqrt{3}-y) \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}-y)$$

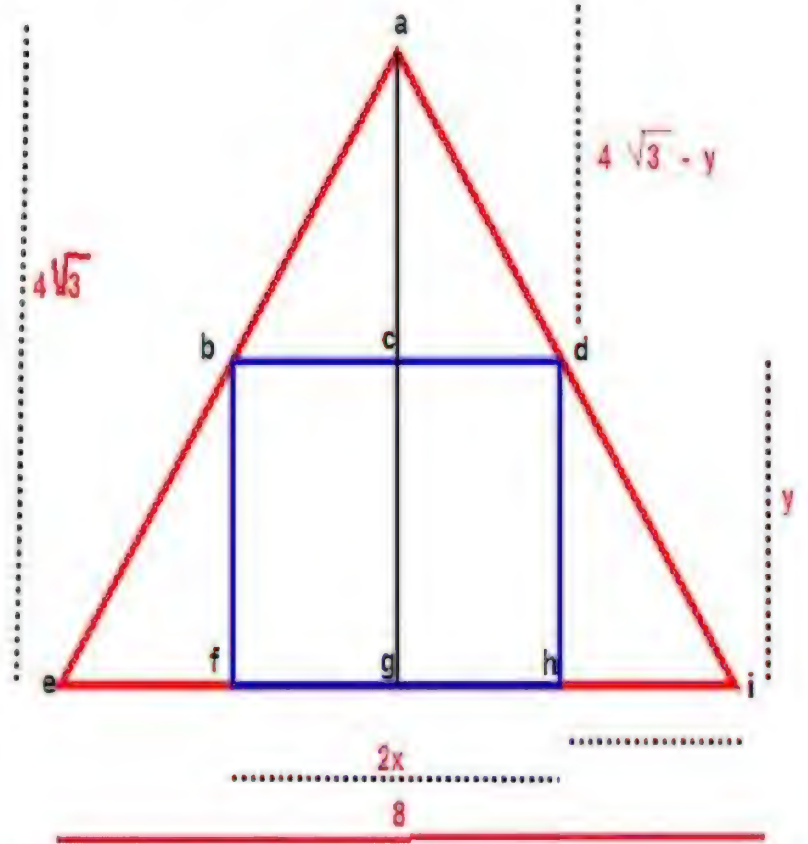
مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض  $A = 2x \cdot y$

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}-y) \cdot y = \frac{2}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}y - y^2)$$

$$A' = \frac{2}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}-2y) = 0 \Rightarrow 4\sqrt{3}-2y = 0$$

$$y = 2\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}(4\sqrt{3}-2\sqrt{3}) \Rightarrow x = 2 \text{ cm}$$

بعدي المستطيل هما  $2x = 4 \text{ cm}, y = 2\sqrt{3} \text{ cm}$



ند بعدي اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث طول قاعدته  $24 \text{ cm}$  وارتفاعه  $18 \text{ cm}$  بحيث أسين متجاورين من رؤوسه يقعان على القاعدة والرأسان الآخران يقعان على ساقيه

2013 دور 2

المستطيل  $x = a$ ، نفرض عرض المستطيل  $y$

2015 تمهيدي

من تشابه المثلثين  $abc, aef$

$$\frac{18-y}{18} = \frac{x}{24} \Rightarrow [18x = 24(18-y)] \div 6$$

$$3x = 4(18-y) \Rightarrow x = \frac{4}{3}(18-y)$$

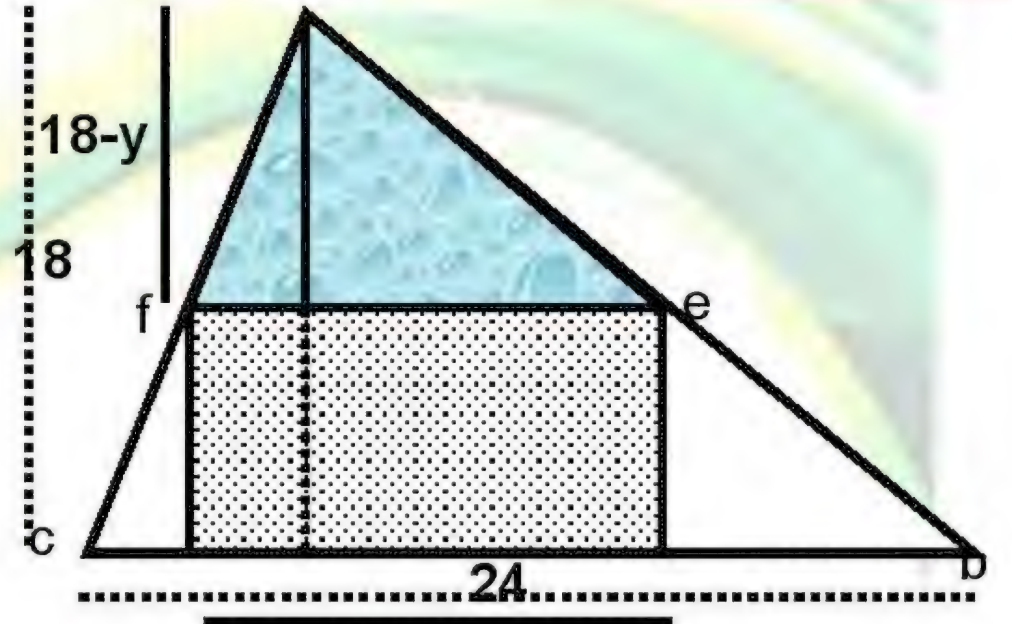
مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض  $A = x \cdot y$

$$A = \frac{4}{3}(18-y) \cdot y = \frac{4}{3}(18y - y^2)$$

$$A' = \frac{4}{3}(18-2y) = 0 \Rightarrow 18-2y = 0$$

$$y = 9 \text{ cm} \Rightarrow x = \frac{4}{3}(18-9) \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

أي ان للمنحني نهاية عظمى وبالتالي تكون لهذا الابعاد اكبر مساحة ممكنة لسطح المستطيل  $A'' = \frac{4}{3}(-2) < 0$



Mob: 07902162268

132

اعدادية الكاظمية للبنين



2011 خارج الطر

ند معادلة المستقيم المار بالنقطة (6,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث

الحل :- نفرض نقطة التقاطع مع محور السينات (x , 0) ،

نفرض نقطة التقاطع مع محور الصادات (0 , y)

من تشابه المثلثين abc , aef

$$\frac{6}{x} = \frac{y-8}{y} \Rightarrow 6y = x(y-8) \Rightarrow x = \frac{6y}{y-8}$$

$$A = \frac{1}{2} x y \quad \text{مساحة المثلث} = \text{نصف القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$A = \frac{1}{2} y \left( \frac{6y}{y-8} \right) \Rightarrow A = \frac{3y^2}{y-8}$$

$$A' = \frac{(y-8) \cdot 6y - 3y^2 \cdot 1}{(y-8)^2} = \frac{6y^2 - 48y - 3y^2}{(y-8)^2}$$

$$\frac{6y^2 - 48y - 3y^2}{(y-8)^2} = 0 \Rightarrow 3y^2 - 48y = 0$$

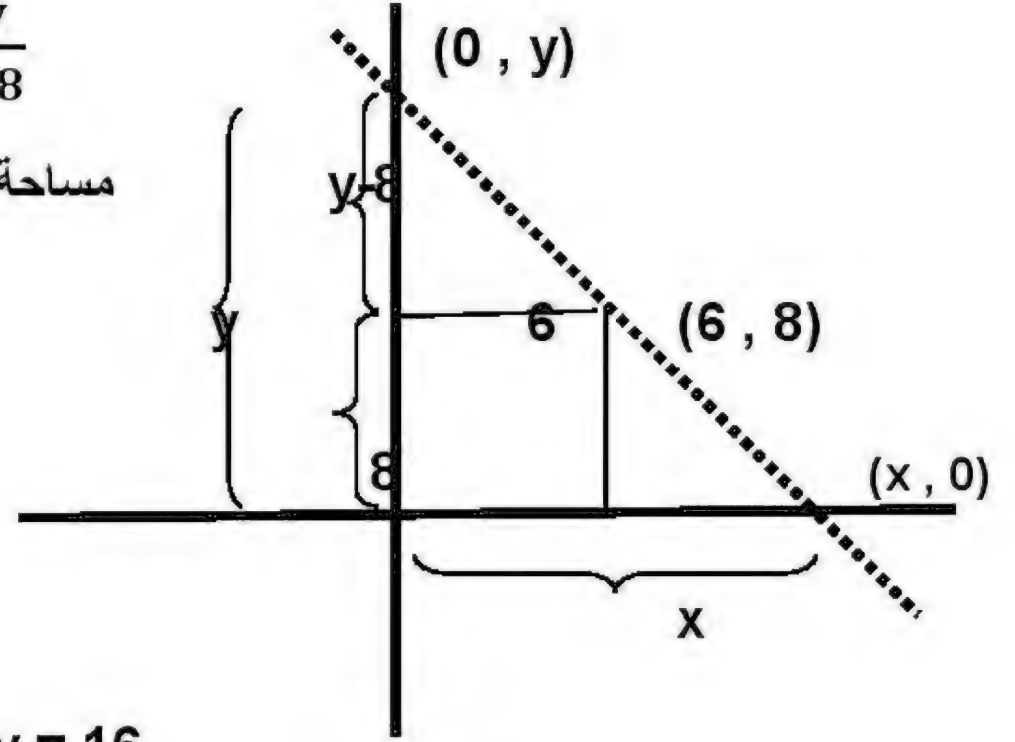
$$3y(y - 16) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ يهمل OR } y = 16$$

$$x = \frac{(6)(16)}{16-8} \Rightarrow x = 12 \Rightarrow (12, 0) , (0, 16) \text{ نقطتي التقاطع مع المحورين الاحداثيين}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{16-0}{0-12} = -\frac{4}{3}$$

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \text{ معادلة المستقيم} \Rightarrow (y - 16) = -\frac{4}{3}(x - 0)$$

$$3y - 48 = -4x \Rightarrow 4x + 3y - 48 = 0 \text{ معادلة المستقيم}$$



Mob: 07902162268

133

اعدادية الكاظمية للبنين



حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الرابع (التكامل وتطبيقاته)  
حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الرابع (التكامل وتطبيقاته)

جد التكمالات التالية

1996 دور 1

$$\int (\sin x - 3 \sec^2 x) dx = -\cos x - 3 \tan x + c$$

$$\begin{aligned} \int \cos 6x \cos 3x dx &= \int (1 - 2 \sin^2 3x) \cos 3x dx \\ &= \int \cos 3x dx - 2 \int \sin^2 3x \cos 3x dx \\ &= \frac{1}{3} \int \cos 3x \cdot 3 dx - 2 \cdot \frac{1}{3} \int \sin^2 3x \cdot 3 \cos 3x dx \\ &= \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{2}{9} \sin^3 3x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx &= \int_0^3 (x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \left[ (x+1)^{\frac{1}{2}} \right]_0^3 \\ &= 2 \left[ \sqrt{x+1} \right]_0^3 = 2(2-1) = 2 \end{aligned}$$

جد التكامل

1996 دور 2

$$\begin{aligned} \int (\sec x - \sin x)(\sec x + \sin x) dx &= \int (\sec^2 x - \sin^2 x) dx \\ &= \int \left[ \sec^2 x - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right] dx = \int \left[ \sec^2 x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right] dx \\ &= \tan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \end{aligned}$$

$$\int_4^8 x \sqrt{x^2 - 15} dx$$

1997 دور 1

$$\begin{aligned} \text{sol: } \int_4^8 x \sqrt{x^2 - 15} dx &= \frac{1}{2} \int_4^8 2x (x^2 - 15)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[ (x^2 - 15)^{\frac{3}{2}} \right]_4^8 \\ &= \frac{1}{3} \left[ \sqrt{(x^2 - 15)^3} \right]_4^8 = \frac{1}{3} \left[ \sqrt{(64 - 15)^3} - \sqrt{(16 - 15)^3} \right] \\ &= \frac{1}{3} (343 - 1) = \frac{342}{3} = 114 \end{aligned}$$



1998 دور 1

اذا كان  $\int_{-1}^a (x - x^3) dx = \frac{-9}{4}$  جد قيمة  $a \in \mathbb{R}$ 

**sol:**  $\int_{-1}^a (x - x^3) dx = \frac{-9}{4} \Rightarrow \left[ \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \right]_{-1}^a = \frac{-9}{4}$   
 $\left( \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4 \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{-9}{4} \Rightarrow \left( \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4 \right) - \frac{1}{4} = \frac{-9}{4}$   
 $\left( \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4 \right) = -2 \Rightarrow 2a^2 - a^4 = -8 \Rightarrow a^4 - 2a^2 - 8 = 0$   
 $(a^2 - 4)(a^2 + 2) = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2, a^2 + 2 \neq 0$

1998 دور 2

اذا كان  $\int_a^b (2x + 3) dx = 12$  وكان  $a + 2b = 3$  جد قيمتي  $a, b \in \mathbb{R}$ 

**sol:**  $\int_a^b (2x + 3) dx = 12 \Rightarrow [x^2 + 3x]_a^b = 12$   
 $(b^2 + 3b) - (a^2 + 3a) = 12 \Rightarrow b^2 + 3b - a^2 - 3a = 12 \dots (1)$   
 $a = 3 - 2b \dots (2) \text{ in } 1$   
 $b^2 + 3b - (3 - 2b)^2 - 3(3 - 2b) = 12$   
 $b^2 + 3b - (9 - 12b + 4b^2) - 9 + 6b - 12 = 0$   
 $b^2 + 3b - 9 + 12b - 4b^2 - 9 + 6b - 12 = 0$   
 $-3b^2 + 21b - 30 = 0 \quad ] \div (-3) \Rightarrow b^2 - 7b + 10 = 0$   
 $(b - 2)(b - 5) = 0 \Rightarrow \text{either } b = 2 \Rightarrow a = -1 \text{ OR } b = 5 \Rightarrow a = -7$

2000 دور 2

2002 دور 1

2005 دور 2

**جد**  $\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx$

**sol:**  $\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx = \int_0^4 (x^2 + 9)^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (x^2 + 9)^{\frac{1}{2}} 2x dx$

$$= \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \right) (x^2 + 9)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{1}{3} [\sqrt{(x^2 + 9)^3}]_0^4$$

$$= \frac{1}{3} [(\sqrt{(16 + 9)^3}) - (\sqrt{(0 + 9)^3})] = \frac{1}{3} [\sqrt{25^3} - \sqrt{9^3}] = \frac{1}{3} (125 - 27) = \frac{98}{3}$$

2004 دور 1

اذا كان  $\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = 2$  جد قيمة  $a \in \mathbb{R}$ 

$\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = 2 \Rightarrow \int_a^4 (x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} x dx = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_a^4 (x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} 2x dx = 2$

$$= \left[ \left( \frac{1}{2} \right) (2) (x^2 + 9)^{\frac{1}{2}} \right]_a^4 = 2 \Rightarrow [\sqrt{x^2 + 9}]_a^4 = 2$$

$$= (\sqrt{16 + 9}) - (\sqrt{a^2 + 9}) = 2 \Rightarrow \sqrt{25} - \sqrt{a^2 + 9} = 2$$

$$\sqrt{a^2 + 9} = 3 \Rightarrow a^2 + 9 = 9 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

Mob: 07902162268

135

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنات



$$\int_0^4 \sqrt{x^2 + 5x} (2x + 5) dx \quad \text{بدقيمة}$$

2001 دور 1

$$\text{sol: } \int_0^4 \sqrt{x^2 + 5x} (2x + 5) dx = \int_0^4 (x^2 + 5x)^{\frac{1}{2}} (2x + 5) dx$$

$$\frac{2}{3} \left[ (x^2 + 5x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \left[ \sqrt{(x^2 + 5x)^3} \right]_0^4 = \frac{2}{3} (\sqrt{(36)^3} - \sqrt{(0)^3}) = \frac{2}{3} (216) = 144$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2} \quad \text{جد}$$

2001 دور 2

$$\text{sol: } \int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-2x)^2} = \int_{-1}^1 (3-2x)^{-2} dx$$

$$= \frac{-1}{2} \int_{-1}^1 (3-2x)^{-2} (-2) dx = \frac{1}{2} [(3-2x)^{-1}]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3-2x} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3-2} - \frac{1}{3+2} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2} \quad \text{جد}$$

2003 دور 2

$$\text{sol: } \int_0^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(3-2x)^2} = \int_0^1 (3-2x)^{-2} dx$$

$$= \frac{-1}{2} \int_0^1 (3-2x)^{-2} (-2) dx = \frac{1}{2} [(3-2x)^{-1}]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3-2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3-2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^4 \sqrt{x} (x+6) dx \quad \text{بدقيمة}$$

2002 دور 2

$$\text{sol: } \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} (x+6) dx = \int_0^4 (x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}) dx = \left[ \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 6 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4$$

$$= \left[ \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + 4 \sqrt{x^3} \right]_0^4 = \left( \frac{2}{5} \sqrt{4^5} + 4 \sqrt{4^3} \right) - (0) = \frac{64}{5} + 32 = \frac{224}{5}$$

$$\int x (x^2 + 3)^3 dx \quad \text{جد}$$

$$\text{sol: } \int x (x^2 + 3)^3 dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 3)^3 2x dx = \frac{1}{8} (x^2 + 3)^4 + c$$

2003 دور 1

$$\int_{-1}^1 \sqrt[3]{3x^3 - 2x^5} dx \quad \text{جد}$$

2004 دور 2

$$\text{sol: } \int_{-1}^1 \sqrt[3]{x^3(3-2x^2)} dx = \int_{-1}^1 (3-2x^2)^{\frac{1}{3}} x dx$$

2015 خارج

$$= \frac{-1}{4} \int_{-1}^1 (3-2x^2)^{\frac{1}{3}} (-4) x dx = \frac{-1}{4} \frac{3}{4} \left[ (3-2x^2)^{\frac{4}{3}} \right]_{-1}^1 = \frac{-1}{16} (1-1) = 0$$

Mob: 07902162268

136

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



$$\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2} dx$$

2006 حور 1

**sol:**  $\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2} dx = \int_1^2 \frac{dx}{(5-2x)^2} = \int_1^2 (5-2x)^{-2} dx$   
 $= \frac{-1}{2} \int_1^2 (5-2x)^{-2} (-2) dx = \frac{1}{2} [(5-2x)^{-1}]_1^2$   
 $= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{5-2x} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5-4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

2009 حور 1

**sol:**  $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^1 (x^2+1)^{-2} x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2+1)^{-2} 2x dx$   
 $= \frac{-1}{2} [(x^2+1)^{-1}]_0^1$   
 $= \frac{-1}{2} \left[ \frac{1}{x^2+1} \right]_0^1 = \frac{-1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{4}$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$$

2006 حور 2

**sol:**  $\int_1^2 \frac{1}{(3x-4)^2} dx = \int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2} = \int_1^2 (3x-4)^{-2} dx$   
 $= \frac{1}{3} \int_1^2 (3x-4)^{-2} (3) dx = \frac{-1}{3} [(3x-4)^{-1}]_1^2$   
 $= \frac{-1}{3} \left[ \frac{1}{3x-4} \right]_1^2 = \frac{-1}{3} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{-1} \right) = \frac{-1}{3} \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{-1}{2}$

$$\int x (x^2+1)^{\frac{3}{4}} dx$$

2007 حور 1

**sol:**  $\int x (x^2+1)^{\frac{3}{4}} dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{\frac{3}{4}} 2x dx$   
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} (x^2+1)^{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7} \sqrt[4]{(x^2+1)^7} + c$

$$\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$$

2008 تمهيدي

**sol:**  $\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx = \int_0^7 (x+1)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} \left[ (x+1)^{\frac{2}{3}} \right]_0^7$   
 $= \frac{3}{2} \left[ \sqrt[3]{(x+1)^2} \right]_0^7 = \frac{3}{2} (4 - 1) = \frac{9}{2}$



2008 دور 1 : إذا كانت  $\int_a^b f(x) dx = 5$  ،  $\int_c^b f(x) dx = 3$  وكانت  $c \in [a, b]$  جد قيمة  $\int_a^c f(x) dx$

**sol:**  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \Rightarrow 5 = \int_a^c f(x) dx + 3 \Rightarrow \int_a^c f(x) dx = 2$

2009 دور 2 : جد قيمة  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3 + x^2}} dx$

**sol:**  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3 + x^2}} dx = \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}} dx = \int_3^8 \frac{x}{|x|\sqrt{x+1}} dx$   
 $= \int_3^8 \frac{x}{x\sqrt{x+1}} dx = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \int_3^8 (x+1)^{-\frac{1}{2}} dx$   
 $= 2 \left[ (x+1)^{\frac{1}{2}} \right]_3^8 = 2 \left[ \sqrt{x+1} \right]_3^8 = 2(3 - 2) = 2$

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

لاحظ عزيزي الطالب ان القيمة المطلقة للمتغير  $x$  تم تعويضها بالصورة الموجبة لان جميع العناصر داخل فترة حدود التكامل موجبة ..... الان اريك ان تجرب فيما لو كانت حدود التكامل  $[-3, 0]$  ماذا سيكون الحل ؟ ولو كانت حدود التكامل  $[-3, 8]$  فماذا سيكون الحل برأيك ؟ فكر ولا تتسرع .

2014 خارج المقرر : جد  $\int_1^2 x e^{-\ln x} dx$

$\int_1^2 x e^{-\ln x} dx = \int_1^2 x (e^{\ln x})^{-1} dx = \int_1^2 x \cdot x^{-1} dx = \int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$

2015 تاريخي 1 : جد  $\int_2^5 x e^{-\ln x} dx$

$\int_2^5 x e^{-\ln x} dx = \int_2^5 x (e^{\ln x})^{-1} dx = \int_2^5 x \cdot x^{-1} dx = \int_2^5 dx = [x]_2^5 = 5 - 2 = 3$

2010 دور 2 : إذا كان  $\int_1^3 f(x) dx = 6$  ،  $\int_1^3 g(x) dx = 2$  جد  $\int_1^3 [f(x) - g(x) + 4x] dx$

**sol:**  $\int_1^3 [f(x) - g(x) + 4x] dx = \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx + \int_1^3 4x dx$   
 $= 6 - 2 + [2x^2]_1^3 = 4 + (18 - 2) = 20$

2010 تمصيدي : جد  $\int (4x + 6)\sqrt{2x + 3} dx$

**sol:**  $\int (4x + 6)\sqrt{2x + 3} dx = \int 2(2x + 3)(2x + 3)^{\frac{1}{2}} dx$   
 $= \int (2x + 3)^{\frac{3}{2}} 2dx = \left( \frac{2}{\frac{5}{2}} \right) (2x + 3)^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5} \sqrt{(2x + 3)^5} + c$



$$\int \frac{x}{(3x^2+5)} dx$$

2014 دور 4 انبار

$$\text{sol : } \int \frac{x}{(3x^2+5)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{(3x^2+5)} dx = \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 5) + c$$

لاحظ اننا لم نضع القيمة المطلقة بعد اجراء التكامل لان الناتج مجموع مربعين ويكون موجبا دائما

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx$$

2012 تمهيدي

2015 تمهيدي

$$\text{sol : } \int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx = [\ln|x^2 + 9|]_0^4 = (\ln 25) - (\ln 9) = \ln \frac{25}{9}$$

2011 دور 1

2013 دور 2

2016 تمهيدي

$$\int_0^1 (1 + e^x)^2 e^x dx = \left[ \frac{1}{3} (1 + e^x)^3 \right]_0^1$$

$$\text{Let } u = 1 + e^x \\ du = e^x dx$$

$$= \frac{1}{3} [(1 + e^1)^3 - (1 + e^0)^3]$$

$$= \frac{1}{3} [(1 + e^1)^3 - (1 + 1)^3]$$

$$= \frac{1}{3} [(1 + e^1)^3 - 8]$$

$$\int_{-3}^4 |x| dx$$

2011 دور 1

الحل :-

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^{(+)}} f(x) = 0 \quad L_1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^{(-)}} f(x) = 0 \quad L_2$$

$$\therefore L_1 = L_2 = 0 \Rightarrow \text{الدالة مستمرة} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\int_{-3}^4 f(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = \int_{-3}^0 (-x) dx + \int_0^4 x dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{2} x^2 \right]_{-3}^0 + \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = [(0) - (-\frac{9}{2})] + [(8) - (0)]$$

$$= \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2} = 12.5$$

يمكن ذكر ان الدالة  
مستمرة على الفترة  
[-3,4] فقط دون ذكر  
تفصيل الاستمرارية  
والافضل اثبات  
الاستمرارية



$$\int_0^1 \frac{3x^2 + 4}{x^3 + 4x + 1} dx = [\ln|x^3 + 4x + 1|]_0^1 = \ln 6 - \ln 1 = \ln 6$$

2011 دور 2

2013 دور 1

$$\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx = \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\ln 3}^{\ln 5} = \frac{1}{2} (e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3})$$

2012 دور 1

2014 دور 2

2016 دور 2

$$= \frac{1}{2} [(e^{\ln 5})^2 - (e^{\ln 3})^2] = \frac{1}{2} [(5)^2 - (3)^2]$$

$$= \frac{1}{2} [25 - 9] = \left(\frac{1}{2}\right)(16) = 8$$

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = [e^{\sqrt{x}}]_1^4$$

$$u = \sqrt{x}, du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

2012 دور 2

2012 خارج

2015 دور 2

$$= (e^{\sqrt{4}}) - (e^{\sqrt{1}}) = e^2 - e$$

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

2013 دور 3

$$\cdot \int_1^a \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx \quad \text{بدقيقة } a \in \mathbb{R} \text{ اذا علمت ان}$$

2014 تميمي

$$\text{RHS : } 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx = 2 [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 [(\tan \frac{\pi}{4}) - (\tan 0)] = 2(1 - 0) = 2$$

$$\text{LHS : } \int_1^a \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_1^a = \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - 1$$

2015 دور 1

$$\therefore \int_1^a \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx \Rightarrow \left[\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - 1 = 2\right] \cdot 2$$

$$a^2 + a - 2 = 4 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow (a + 3)(a - 2) = 0$$

$$a = -3$$

OR

$$a = 2$$



2014 دور 1

$$\int_{-1}^3 f(x) dx \text{ جد } f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \forall x \geq 0 \\ 2x, & \forall x < 0 \end{cases} \text{ اذا كانت}$$

الحل :-

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^{(+)}} f(x) = 0 \quad L_1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^{(-)}} f(x) = 0 \quad L_2$$

$$\therefore L_1 = L_2 = 0 \Rightarrow \text{الغاية موجودة}$$

$$\therefore f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow (0) \text{ الدالة مستمرة عند الـ}$$

وكذلك الدالة مستمرة لكل  $x < 0$  ,  $x > 0$  لانهما كثيرتا حدود

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx = \int_{-1}^0 (2x) dx + \int_0^3 (3x^2) dx \\ &= [x^2]_{-1}^0 + [x^3]_0^3 = [(0) - (1)] + [(27) - (0)] = -1 + 27 = 26 \end{aligned}$$

2014 دور 3

$$\text{sol : } \int \sqrt{e^{2x-4}} dx = \int \sqrt{e^{2(x-2)}} dx = \int e^{x-2} dx = e^{x-2} + c$$

2014 دور 3

$$\int_{-2}^4 |3x - 6| dx = 30$$

sol :

$$|3x - 6| = \begin{cases} 3x - 6, & x \geq 2 \\ -x + 6, & x < 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^{(+)}} f(x) = 0 \quad L_1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^{(-)}} f(x) = 0 \quad L_2 \therefore L_1 = L_2 = 0 \Rightarrow \text{الغاية موجودة}$$

$$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \Rightarrow \text{الدالة مستمرة}$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^4 |3x - 6| dx = \int_{-2}^2 (-3x + 6) dx + \int_2^4 (3x - 6) dx$$

$$= \left[ -\frac{3}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^2 + \left[ \frac{3}{2}x^2 - 6x \right]_2^4$$

$$= [(-6 + 12) - (-6 - 12)] + [(24 - 24) - (6 - 12)]$$

$$= (6 + 18) + (6) = 30$$

Mob: 07902162268

141

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



$$\int_1^8 \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 2 \quad \text{اثبت ان :}$$

2015 دور 2 خارج

$$\begin{aligned} \text{sol : } \int_1^8 \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx &= \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}} dx = 3 \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx \\ &= \left[ 3 \cdot \frac{2}{3} (x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^8 = \left[ 2 \sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^3} \right]_1^8 \\ &= (2 \sqrt{(\sqrt[3]{8}-1)^3}) - (2 \sqrt{(\sqrt[3]{1}-1)^3}) \\ &= (2 \sqrt{(1)^3}) - (2 \sqrt{(0)^3}) = 2 \end{aligned}$$

$$\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}} dx \quad \text{جد التكامل التالي}$$

2015 دور 2

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}} dx &= \int \frac{3(x-2)}{(x-2)^{\frac{1}{3}}} dx = 3 \int (x-2)^{\frac{2}{3}} dx \\ &= 3 \left( \frac{3}{5} \right) (x-2)^{\frac{5}{3}} + c = \frac{9}{5} \sqrt[3]{(x-2)^5} + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x} \sqrt{3+\sqrt{x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2} \sqrt{x} \sqrt{3+\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (3+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

2016 دور 2

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\sqrt{2}} \int (3+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2}} (2) (3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + c \\ &= 2\sqrt{2} \sqrt{3+\sqrt{x}} + c \end{aligned}$$



$$1) \int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3} dx = \int \frac{(x-3)}{2^3(x-3)^3} dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{(x-3)^2} dx = \frac{1}{8} \int (x-3)^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{8} (-1) (x-3)^{-1} + c = \frac{-1}{8(x-3)} + c$$

$$2) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = [\ln |\sin x|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| - \ln \left| \sin \frac{\pi}{6} \right|$$

$$= \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + c$$

2016 تمهيدي

$$\int \cos 2x \sin^2 x dx$$

1997 دور 1

$$\int \cos 2x \cdot \sin^2 x dx = \int \cos 2x \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \int \left( \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos^2 2x \right) dx = \int \left[ \frac{1}{2} \cos 2x - \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) (1 + \cos 4x) \right] dx$$

$$= \int \left[ \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 4x \right] dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} x - \frac{1}{16} \sin 4x + c$$

$$\int (1 + \cos 3x)^2 dx$$

1997 دور 2

2013 دور 2

$$\int (1 + \cos 3x)^2 dx = \int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x) dx$$

$$= \int \left[ 1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2} (1 + \cos 6x) \right] dx = \int \left( 1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6x \right) dx$$

$$= \int \left( \frac{3}{2} + 2\cos 3x + \frac{1}{2} \cos 6x \right) dx = \frac{3}{2} x + \frac{2}{3} \sin 3x + \frac{1}{12} \sin 6x + c$$



1998 حور 1

جد  $\int (\cos x - \sin 2x)^2 dx$ 

$$\begin{aligned}
 \text{sol: } \int (\cos x - \sin 2x)^2 dx &= \int (\cos^2 x - 2 \sin 2x \cos x + \sin^2 2x) dx \\
 &= \int \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) - 2 \cdot 2 \sin x \cos x \cos x + \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) \right] dx \\
 &= \int \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x - 4 \cos^2 x \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx \\
 &= \int \left( 1 + \frac{1}{2} \cos 2x - 4 \cos^2 x \sin x - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx \\
 &= x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{4}{3} \cos^3 x - \frac{1}{8} \sin 4x + c
 \end{aligned}$$

1999 حور 2

ث  $\int (\sin^2 x + \cos^4 x) dx$ 

$$\begin{aligned}
 \text{sol: } \int (\sin^2 x + \cos^4 x) dx &= \int \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + (\cos^2 x)^2 \right] dx \\
 &= \int \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)^2 \right] dx \\
 &= \int \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \right] dx \\
 &= \int \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) \right] dx \\
 &= \int \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right] dx = \int \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right] dx \\
 &= \int \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x \right] dx = \int \left[ \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x \right] dx = \frac{7}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + c
 \end{aligned}$$

2000 حور 1

جد  $\int \sin^4 x dx$ 

$$\begin{aligned}
 \int \sin^4 x dx &= \int [\sin^2 x]^2 dx = \int \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right]^2 dx \\
 &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \left[ 1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right] dx = \frac{1}{4} \int \left[ 1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right] dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \left[ \frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right] dx = \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right] + c
 \end{aligned}$$

2001 حور 1

ث  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ 

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int (\sin x \cos x)^2 dx = \int \left( \frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left( x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + c
 \end{aligned}$$

Mob: 07902162268

144

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



$$\int (\sin^2 x + 1) dx$$

2006 تمهيدي

$$\int (\sin^2 x + 1) dx = \int \left[ \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) + 1 \right] dx = \frac{1}{2} (x - \frac{1}{2} \sin 2x) + x + c$$

لاحظ ان العدد  $\frac{1}{2}$  لم نقم باخراجه خارج التكامل عن التحويل بسبب وجود ملحق مع  $\sin^2 x$  وهو العدد (1)

$$\int \tan 3x \sec^5 3x dx$$

2009 تمهيدي

$$\begin{aligned} \int \tan 3x \sec^5 3x dx &= \int \sec^4 3x \sec 3x \tan 3x dx \\ &= \frac{1}{3} \int \sec^4 3x \cdot 3 \sec 3x \tan 3x dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \sec^5 3x + c = \frac{1}{15} \sec^5 3x + c \end{aligned}$$

$$\int \tan 2x \sec^3 2x dx$$

2008 خارج الطر

$$\begin{aligned} \int \tan 2x \sec^3 2x dx &= \int \sec^2 2x \sec 2x \tan 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sec^2 2x \cdot 2 \sec 2x \tan 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sec^3 2x + c = \frac{1}{6} \sec^3 2x + c \end{aligned}$$

$$\int \cot x \csc^3 x dx$$

2012 دور 2

$$\begin{aligned} \int \cot x \csc^3 x dx &= \int \csc^2 x (\csc x \cot x) dx = - \int \csc^2 x (- \csc x \cot x) dx \\ &= - \frac{1}{3} \csc^3 x + c \end{aligned}$$

$$\int \cos^3 x dx$$

2008 خارج الطر

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos x \cdot \cos^2 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= \int (\cos x - \sin^2 x \cos x) dx = \sin x - \left( \frac{1}{3} \right) \sin^3 x + c \end{aligned}$$

$$\int \cos^2 2x \sin x dx$$

2008 دور 2

$$\begin{aligned} \text{sol : } \int \cos^2 2x \sin x dx &= \int (\cos 2x)^2 \sin x dx \\ &= \int (2\cos^2 x - 1)^2 \sin x dx = \int (4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) \sin x dx \\ &= 4 \int \cos^4 x \sin x dx - 4 \int \cos^2 x \sin x dx + \int \sin x dx \\ &= -4 \int \cos^4 x (-) \sin x dx + 4 \int \cos^2 x (-) \sin x dx + \int \sin x dx \\ &= \frac{-4}{5} \cos^5 x + \frac{4}{3} \cos^3 x - \cos x + c \end{aligned}$$

عزيزي الطالب ماذا لو كان السؤال السابق بالصور  $\int \cos^2 2x \cos x dx$  ،  $\int \cos^2 2x \sin 4x dx$



2010 دور 1

جد  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx$

sol:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2x) dx = \left[ x - \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos \pi \right) - \left( 0 - \frac{1}{2} \cos 0 \right)$$

$$= \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \right) - \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + 1$$

جد  $\int \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} dx$

2010 تمهيدي

2014 خارج القطر

$$\int \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} dx = \int \frac{\cos x \cdot \cos^2 x}{1 - \sin x} dx$$

$$= \int \frac{\cos x \cdot (1 - \sin^2 x)}{1 - \sin x} dx = \int \frac{\cos x \cdot (1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 - \sin x} dx$$

$$= \int (1 + \sin x) \cos x dx = \frac{1}{2} (1 + \sin x)^2 + c$$

ملاحظة || يمكن حل السؤال السابق بطريقة (ضرب البسط والمقام بمرافق المقام  $1 + \sin x$  فيصبح المقام عندها  $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$  ليتم اختصاره مع البسط للوصول الى نفس النتيجة ، اما الخطوة قبل الاخيرة فيمكن اجراء التكامل بطرق اخرى (حاول ذلك)

جد  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$

2011 خارج القطر

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} (-\sin x) dx = [-e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (-e^{\cos \frac{\pi}{2}}) - (-e^{\cos 0}) = -e^0 + e^1 = -1 + e$$

جد  $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$

2013 خارج القطر

2014 دور 4 انبار

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int \sqrt{(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x)} dx$$

$$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = \pm \int (\sin x - \cos x) dx = \pm (-\cos x - \sin x) + c$$

عزيزي الطالب : ماذا لو كان السؤال السابق  $\int \sqrt{1 - \sin 4x} dx$  او  $\int \sqrt{9 - 9 \sin 6x} dx$  ؟؟؟

Mob: 07902162268

146

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



2011 دور 1

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{(2+\tan x)} dx &= [\ln(2 + \tan x)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= [\ln(2 + \tan \frac{\pi}{4}) - \ln(2 + \tan(-\frac{\pi}{4}))] \\
 &= [\ln(2 + \tan \frac{\pi}{4}) - \ln(2 - \tan \frac{\pi}{4})] = \ln(2+1) - \ln(2-1) \\
 &= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3
 \end{aligned}$$

2012 تمهيدي

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
 &= [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}} = -[\ln|\cos \frac{\pi}{3}| - \ln|\cos 0|] \\
 &= -[\ln|\frac{1}{2}| - \ln|1|] = -(\ln \frac{1}{2} - 0) = -\ln \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

2013 دور 1

$$\begin{aligned}
 \int \csc^2 x \cdot \cos x dx &= \int (\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x) dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\
 &= \int (\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}) dx = \int \cot x \cdot \csc x dx = -\csc x + c
 \end{aligned}$$

2013 دور 3

2014 دور 2

$$\text{sol: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x dx = \frac{1}{2} [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} (\tan \frac{\pi}{4} - \tan 0) = \frac{1}{2}$$

2014 دور 1

2015 دور 1

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx &= \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx \\
 &= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x} dx \\
 &= \int (\cos 2x + \sin 2x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + c
 \end{aligned}$$



$$\int \sin 6x \cos^2 3x \, dx$$

2014 دور 3

**sol :**  $\int \sin 6x \cos^2 3x \, dx = \int 2 \sin 3x \cos 3x \cos^2 3x \, dx$   
 $= 2 \int \cos^3 3x \sin 3x \, dx = 2 \left( \frac{-1}{3} \right) \int \cos^3 3x (-3) \sin 3x \, dx$   
 $= \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cos^4 3x + c = \frac{-1}{6} \cdot \cos^4 3x + c$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$$

2015 تمهيدي

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cos x \, dx = [2(\sin x)^{\frac{1}{2}}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = [2\sqrt{\sin x}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (2\sqrt{\sin \frac{\pi}{2}}) - (2\sqrt{\sin \frac{\pi}{6}}) = (2\sqrt{1}) - (2\sqrt{\frac{1}{2}}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} \, dx$$

2015 نازحين 1

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} \, dx = \int (\sin x)^{-\frac{1}{3}} \cos x \, dx = \frac{3}{2} (\sin x)^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\sin^2 x} + c$$

$$\int \sec^2 8x e^{\tan 8x} \, dx$$

2015 خارج 1

$$\int \sec^2 8x e^{\tan 8x} \, dx = \frac{1}{8} \int 8 \sec^2 8x e^{\tan 8x} \, dx = \frac{1}{8} e^{\tan 8x} + c$$

جد التكاملات التالية :

2015 4 رسالة

$$1) \int_3^2 \frac{x^3 - 1}{x - 1} \, dx = - \int_2^3 \frac{x^3 - 1}{x - 1} \, dx = - \int_2^3 \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \, dx = - \int_2^3 (x^2 + x + 1) \, dx$$

$$= - \left[ \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x \right]_2^3 = - \left[ \left( 9 + \frac{9}{2} + 3 \right) - \left( \frac{8}{3} + 2 + 2 \right) \right]$$

$$= - \left[ 12 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} - 4 \right] = - 8 - \frac{9}{2} + \frac{8}{3} = \frac{-48 - 27 + 16}{6} = \frac{-59}{6}$$

$$2) \int (\sin 2x + \cos 2x)^2 \, dx = \int (\sin^2 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$$

$$= \int (1 + \sin 4x) \, dx = x - \frac{1}{4} \cos 4x + c$$



$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int \sin 6x \cos^2 3x \, dx &= \int 2 \sin 3x \cos 3x \cos^2 3x \, dx \\
 &= 2 \int \cos^3 3x \sin 3x \, dx \\
 &= (2) \left( \frac{-1}{3} \right) \int \cos^3 3x (-3 \sin 3x) \, dx \\
 &= \left( \frac{-2}{3} \right) \left( \frac{1}{4} \right) \cos^4 3x + c = \left( \frac{-1}{6} \right) \cos^4 3x + c
 \end{aligned}$$

$$u = \cos 3x$$

$$du = -3 \sin 3x \, dx$$

تأكيد || يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة فالطريقة اعلاه تم توحيد الزوايا بدلالة  $3x$  وهناك طريقة اخرى باستخدام القانون  $\cos^2 3x = \frac{1}{2} (1 + \cos 6x)$  كما سيرد ذكرها الانه

$$\begin{aligned}
 \int \sin 6x \cos^2 3x \, dx &= \int \sin 6x \left[ \frac{1}{2} (1 + \cos 6x) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sin 6x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin 6x \cos 6x \, dx \\
 &= \frac{1}{12} \int \sin 6x \cdot 6 \, dx + \frac{1}{12} \int \sin 6x (6 \cos 6x) \, dx \\
 &= -\frac{1}{12} \cos 6x + \frac{1}{24} \sin^2 6x + c
 \end{aligned}$$

تأكيد || يمكن حل  $\int \sin 6x \cos 6x \, dx$  بطريقتين اضافيتين الاولى نجعل القوس الاصلي هو  $\cos 6x$  ويكون الجواب  $\frac{-1}{24} \cos^2 6x$  والاخرى تحويل  $\sin 6x \cos 6x = \frac{1}{2} \sin 12x$  ثم اجراء التكامل

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1 - \cos^2 2x} \, dx &= \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x} \, dx = \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \csc^2 2x \, dx \\
 &= \frac{-1}{2} \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} (-2) \csc^2 2x \, dx = \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cot^{\frac{3}{2}} 2x + c \\
 &= \frac{-1}{3} \sqrt{\cot^3 2x} + c
 \end{aligned}$$



إذا كان للمنحنى  $f(x) = (x - 3)^3 + 1$  يمتلك نقطة انقلاب  $(a, b)$  جد القيمة العددية للمقدار

2015 ح4 مراجعة

$$\int_0^b f'(x) dx - \int_0^a f''(x) dx$$

الحل :- نقطة الانقلاب ناتجة من مساواة المشتقة الثانية بالصفر

$$f'(x) = 3(x - 3)^2 \Rightarrow f''(x) = 6(x - 3) \Rightarrow 6(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = (3 - 3)^3 + 1 = 1 \Rightarrow (3, 1) \text{ نقطة انقلاب}$$

$$(3, 1) = (a, b) \Rightarrow a = 3, b = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^b f'(x) dx - \int_0^a f''(x) dx &= \int_0^1 3(x - 3)^2 dx - \int_0^3 6(x - 3) dx \\ &= [(x - 3)^3]_0^1 - [3(x - 3)^2]_0^3 \\ &= [(1 - 3)^3 - (0 - 3)^3] - [3(3 - 3)^2 - 3(0 - 3)^2] \\ &= [-8 + 27] - [0 - 27] = 19 + 27 = 46 \end{aligned}$$

$f(x)$  دالة مستمرة على الفترة  $[-2, 6]$  فإذا كان  $\int_1^6 f(x) dx = 6$

2016 حور 1

وكان  $\int_{-2}^6 [f(x) + 3] dx = 32$  جد  $\int_{-2}^1 f(x) dx$ .

$$\text{sol : } \int_{-2}^6 [f(x) + 3] dx = 32 \Rightarrow \int_{-2}^6 [f(x)] dx + \int_{-2}^6 [3] dx = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^6 [f(x)] dx + [3x]_{-2}^6 = 32 \Rightarrow \int_{-2}^6 [f(x)] dx + (18) - (-6) = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^6 [f(x)] dx + 24 = 32 \Rightarrow \int_{-2}^6 [f(x)] dx = 8, \quad \because \int_1^6 f(x) dx = 6$$

$$\int_{-2}^6 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^6 f(x) dx \Rightarrow 8 = \int_{-2}^1 f(x) dx + 6 \Rightarrow \int_{-2}^1 f(x) dx = 2$$



2016 تمهيدي

تكن  $f(x) = x^2 + 2x + k$  حيث  $k \in \mathbb{R}$  ، دالة نهايتها الصغرى (-5) جد  $\int_{-1}^2 f(x) dx$  .

الحل :- بما ان الدالة تمتلك نهاية صغرى فان  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية  $\Rightarrow f''(x) = 2 > 0$

$\therefore f(x) \in$  نقطة النهاية الصغرى المحلية (-5 , -1)

$$-5 = 1 - 2 + k \Rightarrow k = -4 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 4$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^2 (x^2 + 2x - 4) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x \right]_{-1}^2 \\ &= \left( \frac{1}{3}(2)^3 + (2)^2 - 4(2) \right) - \left( \frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) \right) \\ &= \left( \frac{8}{3} + 4 - 8 \right) - \left( -\frac{1}{3} + 1 + 4 \right) = \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} - 5 = 3 - 9 = -6 \end{aligned}$$

يمكن ملاحظة العلاقة بين سؤال الكتاب ادناه مع السؤال اعلاه

لتكن  $f(x) = x^2 + 2x + k$  حيث  $k \in \mathbb{R}$  ، دالة نهايتها الصغرى (-5) جد  $\int_1^3 f(x) dx$  .

$$\int_1^4 f(x) dx \quad \text{جد} \quad f(x) = \begin{cases} 2x & , \forall x \geq 3 \\ 6 & , \forall x < 3 \end{cases} \quad \text{اذا كانت}$$

2016 دور 2 خارج

$$f(3) = (2)(3) = 6$$

الحل :-

$$\lim_{x \rightarrow 3^{(+)}} f(x) = (2)(3) = 6 \quad L_1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 3^{(-)}} f(x) = 6 \quad L_2$$

$$\therefore L_1 = L_2 = 6 \Rightarrow \text{الغاية موجودة}$$

$$\therefore f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6 \Rightarrow \text{الدالة مستمرة عند الـ (3)}$$

وكذلك الدالة مستمرة لكل  $x < 3$  ,  $x > 3$  لانهما كثيرتا حدود

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(x) dx &= \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_1^3 6 dx + \int_3^4 2x dx \\ &= [6x]_1^3 + [x^2]_3^4 = [(18) - (6)] + [(16) - (9)] \\ &= 12 + 7 = 19 \end{aligned}$$



جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين  $f(x) = x^2$  ,  $g(x) = x^4 - 12$ 

$$\text{sol : } h(x) = x^4 - 12 - x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$$

يهمل

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$A = \left| \int_{-2}^2 f(x) dx \right| \Rightarrow A = \left| \int_{-2}^2 (x^4 - x^2 - 12) dx \right|$$

$$= \left| \left[ \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - 12x \right]_{-2}^2 \right|$$

$$= \left| \left( \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 \right) - \left( -\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 24 \right) \right| = \left| \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 \right|$$

$$= \left| \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48 \right| = \left| \frac{192 - 80 - 720}{15} \right| = \left| \frac{-608}{15} \right| = \frac{608}{15} \text{ وحدة مساحة}$$

1997 دور 2

2008 دور 1

2008 خارج

2015 دور 2 خارج

2015 دور 3

2016 دور 2 خارج

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة  $f(x) = x^4 - 4x^2$  ومحور السينات بالفترة  $[1, 3]$ 

$$\text{sol : if } y = 0 \Rightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1, 3] \text{ OR } x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \in [1, 3], x = -2 \notin [1, 3]$$

$$A = \left| \int_1^2 f(x) dx \right| + \left| \int_2^3 f(x) dx \right|$$

$$A = \left| \int_1^2 (x^4 - 4x^2) dx \right| + \left| \int_2^3 (x^4 - 4x^2) dx \right|$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A_1 = \int_1^2 (x^4 - 4x^2) dx = \left[ \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 \right]_1^2$$

$$= \left( \frac{32}{5} - \frac{32}{3} \right) - \left( \frac{1}{5} - \frac{4}{3} \right) = \left( \frac{32}{5} - \frac{32}{3} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3} \right) = \frac{31}{5} - \frac{28}{3} = \frac{93 - 140}{15} = \frac{-47}{15}$$

$$A_2 = \int_2^3 (x^4 - 4x^2) dx = \left[ \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 \right]_2^3$$

$$= \left( \frac{243}{5} - \frac{108}{3} \right) - \left( \frac{32}{5} - \frac{32}{3} \right) = \left( \frac{243}{5} - \frac{108}{3} - \frac{32}{5} + \frac{32}{3} \right) = \frac{211}{5} - \frac{76}{3} = \frac{633 - 380}{15} = \frac{253}{15}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \frac{-47}{15} \right| + \left| \frac{253}{15} \right| = \frac{47}{15} + \frac{253}{15} = \frac{300}{15} = 20 \text{ وحدة مساحة}$$

1998 دور 1



بـ المساحة المحددة بمنحني الدالتين  $f(x) = x$  ,  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  بالفترة  $[-1, 1]$

1999 دور 1

2005 تمهيدي

بتربيع الطرفين  $\Rightarrow \sqrt[3]{x} - x = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = x$  **sol :**  $h(x) = x - \sqrt[3]{x}$

لاتجزأ  $x = \pm 1 \in [-1, 1]$  OR  $x = 0$   $\Rightarrow x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x = x^3$

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_{-1}^0 h(x) dx \right| + \left| \int_0^1 h(x) dx \right| \\
 &= \left| \int_{-1}^0 \left( x^{\frac{1}{3}} - x \right) dx \right| + \left| \int_0^1 \left( x^{\frac{1}{3}} - x \right) dx \right| \\
 &= \left[ \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\
 &= \left| (0 - 0) - \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) - (0 - 0) \right| \\
 &= \left| -\frac{1}{4} \right| + \left| \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ وحدة مساحة}
 \end{aligned}$$



2011 دور 1

ند المساحة المحددة بمنحني الدالتين  $f(x) = x$  ,  $g(x) = \sqrt{x}$ بتربيع الطرفين  $[\sqrt{x} = x] \Rightarrow \sqrt{x} - x = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - x = 0$   $sol: h(x) = \sqrt{x} - x$ 

$$x = x^2 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ OR } x = 1$$

$$A = \left| \int_0^1 h(x) dx \right| = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx \right| = \left| \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x) dx \right|$$

$$= \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1$$

$$= \left| \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) - (0 - 0) \right| = \left| \frac{4-3}{6} \right| = \frac{1}{6} \text{ وحدة مساحة}$$

1999 دور 2

ند المساحة المحددة بمنحني الدالتين  $f(x) = 2 - x^2$  ,  $g(x) = x$  بالفترة  $[-2, 2]$  $sol: h(x) = x - (2 - x^2) = x^2 + x - 2$  ,  $x^2 + x - 2 = 0$  $(x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow$  either  $x = -2 \in [-2, 2]$  لا تجزأ , or  $x = 1 \in [-2, 2]$ 

$$A = \left| \int_{-2}^1 h(x) dx \right| + \left| \int_1^2 h(x) dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^2 + x - 2) dx \right|$$

$$= \left| \left[ \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 2x \right]_{-2}^1 \right| + \left| \left[ \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 2x \right]_1^2 \right|$$

$$= \left| \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left( \frac{-8}{3} + 2 + 4 \right) \right| + \left| \left( \frac{8}{3} + 2 - 4 \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right|$$

$$= \left| \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6 \right) \right| + \left| \left( \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right| = \dots = \frac{19}{3} \text{ unit}^2$$



ند المساحة المحددة بالمنحنى  $f(x) = x^3 - 9x$  ومحور السينات بالفترة  $[-3, 3]$

2001 دور 1

2015 دور 2

**sol :** if  $y = 0 \Rightarrow x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0$

لا يجرأ  $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \in [-3, 3]$  OR يجرأ  $x = 0 \in [-3, 3]$

$$A = \left| \int_{-3}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^3 f(x) dx \right| = \left| \int_{-3}^0 (x^3 - 9x) dx \right| + \left| \int_0^3 (x^3 - 9x) dx \right|$$

$$= \left| \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 \right]_{-3}^0 \right| + \left| \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 \right]_0^3 \right|$$

$$= \left| (0) - \left( \frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) \right| + \left| \left( \frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) - (0) \right| = \left| \frac{81}{4} \right| + \left| -\frac{81}{4} \right| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2} \text{ وحدة مساحة}$$

ند المساحة المحددة بالمنحنى  $f(x) = x^3 - 4x$  ومحور السينات بالفترة  $[-2, 2]$

2007 تمهيدي

**sol :** if  $y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$

لا يجرأ  $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \in [-2, 2]$  OR يجرأ  $x = 0 \in [-2, 2]$

$$A = \left| \int_{-2}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^2 f(x) dx \right| = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right|$$

$$= \left| \left[ \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[ \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_0^2 \right|$$

$$= \left| (0) - (4 - 8) \right| + \left| (4 - 8) - (0) \right| = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8 \text{ وحدة مساحة}$$

ند المساحة المحددة بمنحنى الدالتين  $f(x) = x^2$  ،  $g(x) = 2x$  بالفترة  $[1, 3]$

2002 دور 1

**sol :**  $h(x) = g(x) - f(x) = x^2 - 2x$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$$

either  $x = 0 \notin [1, 3]$  , or  $x = 2 \in [1, 3]$

$$A = \left| \int_1^2 h(x) dx \right| + \left| \int_2^3 h(x) dx \right| = \left| \int_1^2 (x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \right|$$

$$= \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_1^2 \right| + \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^3 \right|$$

$$= \left| \left( \frac{8}{3} - 4 \right) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \right| + \left| (9 - 9) - \left( \frac{8}{3} - 4 \right) \right| = \dots = 2 \text{ unit}^2$$



2002 دور 2

ند المساحة المحددة بمنحني الدالتين  $f(x) = 3x^2$  ,  $g(x) = x^4 - 4$ 

$$\text{sol : } h(x) = g(x) - f(x) = x^4 - 4 - 3x^2 = x^4 - 3x^2 - 4$$

$$\text{if } h(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

يهمل

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ OR } x = -2$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^2 f(x) dx \right| = \left| \int_{-2}^2 (x^4 - 3x^2 - 4) dx \right| \\ &= \left| \left[ \frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x \right]_{-2}^2 \right| = \left| \left( \frac{32}{5} - 8 - 8 \right) - \left( -\frac{32}{5} + 8 + 8 \right) \right| \\ &= \left| \frac{32}{5} - 8 - 8 + \frac{32}{5} - 8 - 8 \right| = \left| \frac{64}{5} - 32 \right| = \left| \frac{64 - 160}{5} \right| = \left| \frac{-96}{5} \right| = \frac{96}{5} \text{ unit}^2 \end{aligned}$$

2005 دور 1

ند المساحة المحددة بمنحني الدالة  $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$  ومحور السينات

$$\text{sol : if } y = 0 \Rightarrow x^3 + 4x^2 + 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 + 4x + 3) = 0 \Rightarrow x(x + 3)(x + 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{OR} \quad x = -3 \quad \text{OR} \quad x = -1$$

$$A = \left| \int_{-3}^{-1} f(x) dx \right| + \left| \int_{-1}^0 f(x) dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x) dx \right| + \left| \int_{-1}^0 (x^3 + 4x^2 + 3x) dx \right|$$

$$= \left| \left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^{-1} \right| + \left| \left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 \right|$$

$$= \left| \left( \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) - \left( \frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2} \right) \right| + \left| \left( 0 \right) - \left( \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) \right|$$

$$= \left| \left( \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{81}{4} + \frac{108}{3} - \frac{27}{2} \right) \right| + \left| -\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{-80}{4} + \frac{104}{3} - \frac{24}{2} \right| + \left| \frac{-3+16-18}{12} \right| = \left| -32 + \frac{104}{3} \right| + \left| \frac{-5}{12} \right|$$

$$= \left| \frac{8}{3} \right| + \left| \frac{-5}{12} \right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{32+5}{12} = \frac{37}{12} \text{ وحدة مساحة}$$



ند المساحة المحددة بمنحنى الدالة  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$  ومحور السينات

2006 تمهيدي

2013 دور 1

**sol :** if  $y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x(x - 2)(x - 1) = 0$

$x = 0 \quad \underline{\text{OR}} \quad x = 2 \quad \underline{\text{OR}} \quad x = 1$

$A = \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^2 f(x) dx \right|$

$A = \left| \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \right|$

$= \left| \left[ \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 \right| + \left| \left[ \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_1^2 \right|$

$= \left| \left( \frac{1}{4} - 1 + 1 \right) - (0) \right| + \left| (4 - 8 + 4) - \left( \frac{1}{4} - 1 + 1 \right) \right|$

$= \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$  وحدة مساحة

ند المساحة المحددة بالمنحنى  $f(x) = 3x^2 + 4$  ومحور السينات بالفترة  $[-2, 2]$

2008 تمهيدي

2010 تمهيدي

**sol :** دائما  $3x^2 + 4 > 0$  حيث  $y \neq 0$

$A = \left| \int_{-2}^2 f(x) dx \right| = \left| \int_{-2}^2 (3x^2 + 4) dx \right|$

$= \left| \left[ x^3 + 4x \right]_{-2}^2 \right| = \left| (8 + 8) - (-8 - 8) \right| = \left| 16 + 16 \right| = 32$  وحدة مساحة

ند المساحة المحددة بين منحنى القطع المكافئ  $y = x^2$  والمستقيم الذي معادلته  $y = 2x + 3$

2014 خارج القطر

**sol :**  $h(x) = g(x) - f(x) = x^2 - 2x - 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$

$A = \left| \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx \right| = \dots$



2015 تمهيدي

جد المساحة المحصورة بين المنحنيين  $y = x^3$  ,  $y = x$ 

$$\text{sol: } h(x) = x^3 - x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ OR } x = 1 \text{ OR } x = -1$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^0 h(x) dx \right| + \left| \int_0^1 h(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - x) dx \right| \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \left| (0 - 0) - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - (0 - 0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ وحدة مساحة} \end{aligned}$$

2012 تمهيدي

جد المساحة المحددة بالمنحنيين  $y = x^4 - 8$  ,  $y = 2x^2$ 

$$\text{sol: } h(x) = x^4 - 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^2 h(x) dx \right| = \left| \int_{-2}^2 (x^4 - 2x^2 - 8) dx \right| \\ &= \left| \left[ \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - 8x \right]_{-2}^2 \right| = \dots \end{aligned}$$

2012 دور 1

جد المساحة المحددة بالمنحني  $f(x) = (x - 1)^3$  ومحور السينات في الفترة  $[-1, 3]$ 

$$\text{sol: } (x - 1)^3 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [-1, 3]$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^3 f(x) dx \right| = \left| \int_{-1}^1 (x - 1)^3 dx \right| + \left| \int_1^3 (x - 1)^3 dx \right| \\ &= \left| \left[ \frac{1}{4} (x - 1)^4 \right]_{-1}^1 \right| + \left| \left[ \frac{1}{4} (x - 1)^4 \right]_1^3 \right| = \dots = 8 \text{ unit}^2 \end{aligned}$$

2013 دور 3

جد المساحة المحددة بالمنحني  $f(x) = x^2$  ومحور السينات والمستقيمين  $x = 1$  ,  $x = 3$ 

$$\text{sol: } \text{if } y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1, 3]$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_1^3 f(x) dx \right| = \left| \int_1^3 (x^2) dx \right| \\ &= \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_1^3 \right| = \left| (9) - \left( \frac{1}{3} \right) \right| = \left| \frac{26}{3} \right| = \frac{26}{3} \text{ وحدة مساحة} \end{aligned}$$



جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى  $f(x) = x^2 - 4$  ومحور السينات وعلى الفترة  $[-2, 3]$

2014 تمهيدي

**sol :** if  $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = 2 \in [-2, 3]$  , لا تجزأ ,  $x = -2 \in [-2, 3]$

$A = \left| \int_{-2}^2 f(x) dx \right| + \left| \int_2^3 f(x) dx \right|$

$= \left| \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx \right| + \left| \int_2^3 (x^2 - 4) dx \right|$

$= \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_{-2}^2 \right| + \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_2^3 \right|$

$= \left| \left( \frac{8}{3} - 8 \right) - \left( -\frac{8}{3} + 8 \right) \right| + \left| (9 - 12) - \left( \frac{8}{3} - 8 \right) \right|$

$= \left| -\frac{16}{3} - \frac{16}{3} \right| + \left| -3 + \frac{16}{3} \right|$

$= \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{39}{3} = 13$  وحدة مساحة

جد المساحة المحددة بالمنحنيين  $y = \sin x$  ,  $y = \sin x \cdot \cos x$  بالفترة  $[0, 2\pi]$

**sol :**  $h(x) = \sin x \cos x - \sin x = \sin x (\cos x - 1)$

$\Rightarrow \sin x (\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0, 2\pi] \text{ OR } x = \pi \in [0, 2\pi] \text{ OR } x = 2\pi \in [0, 2\pi]$  اما

$\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0$

$A = \left| \int_0^\pi h(x) dx \right| + \left| \int_\pi^{2\pi} h(x) dx \right|$

$= \left| \int_0^\pi \sin x (\cos x - 1) dx \right| + \left| \int_\pi^{2\pi} \sin x (\cos x - 1) dx \right|$

$= \left| -\int_0^\pi (\cos x - 1)(-\sin x) dx \right| + \left| -\int_\pi^{2\pi} (\cos x - 1)(-\sin x) dx \right|$

$= \left| \left[ -\frac{1}{2} (\cos x - 1)^2 \right]_0^\pi \right| + \left| \left[ -\frac{1}{2} (\cos x - 1)^2 \right]_\pi^{2\pi} \right|$

$= \frac{1}{2} \left| [(\cos \pi - 1)^2 - (\cos 0 - 1)^2] \right| + \frac{1}{2} \left| [(\cos 2\pi - 1)^2 - (\cos \pi - 1)^2] \right|$

$= \frac{1}{2} \left| [(-1 - 1)^2 - (1 - 1)^2] \right| + \frac{1}{2} \left| [(1 - 1)^2 - (-1 - 1)^2] \right|$

$= \frac{1}{2} \left| 4 \right| + \frac{1}{2} \left| 4 \right| = 2 + 2 = 4$  وحدة مساحة

1998 دور 2

2004 دور 1

2009 تمهيدي

2014 دور 1

2015 خارج



ند المساحة المحددة بمنحني الدالة  $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$  ومحور السينات بالفترة  $[0, \frac{\pi}{2}]$

2001 دور 2

2016 دور 2

sol: if  $y = 0 \Rightarrow y = 1 - 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$

$$2x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, 1, 2$$

$n = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  [يجزأ التكامل]

$n = 1 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$  [لايجزأ التكامل]

$n = 2 \Rightarrow 2x = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$  [لايجزأ التكامل]

لاحظ عدم تعويض القيم السالبة لـ (n) لان الفترة في السؤال موجبة .

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x) dx \right|$$

$$= \left| \left[ \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| \left[ \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| (\sin \frac{\pi}{2}) - (\sin 0) \right| + \frac{1}{2} \left| (\sin \pi) - (\sin \frac{\pi}{2}) \right| = \frac{1}{2} \left| (1) - (0) \right| + \frac{1}{2} \left| (0) - (1) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| 1 \right| + \frac{1}{2} \left| -1 \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ وحدة مساحة}$$

((ملاحظة ممكن ان يكون السؤال السابق بالصيغ التالية))

$$\{ \textcircled{1} y = 1 - 2\sin^2 x, \textcircled{2} y = \cos^2 x - \sin^2 x, \textcircled{3} y = \cos^4 x - \sin^4 x \} = \cos 2x$$

$$\{ \textcircled{4} y = 2\sin^2 x - 1, \textcircled{5} y = 1 - 2\cos^2 x, \textcircled{6} y = \sin^2 x - \cos^2 x \} = -\cos 2x$$

ند المساحة المحددة بمنحني الدالة  $f(x) = \cos 2x$  ومحور السينات بالفترة  $[0, \frac{\pi}{2}]$

2003 دور 2

ند المساحة المحددة بمنحني الدالة  $f(x) = 2\cos^2 x - 1$  ومحور السينات بالفترة  $[0, \frac{\pi}{2}]$

2006 دور 2

2016 دور 1

ند المساحة المحددة بالمنحنيين  $f(x) = \cos^2 x, g(x) = \sin^2 x$  ومحور السينات

بالفترة  $[0, \frac{\pi}{2}]$

2009 دور 2



ند المساحة المحددة بمنحني الدالتين  $y = 1 + \cos x$  ,  $y = -\cos x$  بالفترة  $[0, \frac{\pi}{2}]$

2004 دور 2

**sol** :  $h(x) = 1 + \cos x + \cos x = 1 + 2\cos x$

$1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$  زاوية الاسناد تساوي

$x = \frac{2\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$  or  $x = \frac{4\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

$A = | \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx | = | \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x) dx |$

$= | [x + 2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} | = | (0) - (\frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{\pi}{2}) | = \frac{\pi}{2} + 2 \text{ unit}^2$

ند المساحة المحددة بالمنحنيين  $f(x) = \sin 2x$  ,  $g(x) = \sin x$  بالفترة  $[0, \frac{\pi}{2}]$

2005 دور 2

**sol** :  $h(x) = \sin 2x - \sin x = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$

2006 دور 1

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  لايجزأ OR  $x = \pi \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

زاوية الاسناد  $\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos x - 1 = 0$  او

$x = \frac{\pi}{3} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  (الربع الاول) OR  $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$  (الربع الرابع)

$A = | \int_0^{\frac{\pi}{3}} h(x) dx | + | \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx |$

$= | \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x(2\cos x - 1) dx | + | \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(2\cos x - 1) dx |$

$= | -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)(-2\sin x) dx | + | -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x - 1)(-2\sin x) dx |$

$= | [-\frac{1}{4} (2\cos x - 1)^2]_0^{\frac{\pi}{3}} | + | [-\frac{1}{4} (2\cos x - 1)^2]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |$

$= \frac{1}{4} | [(2\cos \frac{\pi}{3} - 1)^2 - (2\cos 0 - 1)^2] | + \frac{1}{4} | [(2\cos \frac{\pi}{2} - 1)^2 - (2\cos \frac{\pi}{3} - 1)^2] |$

$= \frac{1}{4} | [(1 - 1)^2 - (2 - 1)^2] | + \frac{1}{4} | [(0 - 1)^2 - (1 - 1)^2] | = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$  وحدة مساحة



2007 دور 1

تد المساحة المحددة بمنحني الدالة  $f(x) = \sin 4x$  ومحور السينات بالفترة  $[0, \frac{\pi}{2}]$ sol : if  $y = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = 0 + n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2$  $n = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  لايجزأ التكامل $n = 1 \Rightarrow 4x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  يجزأ التكامل $n = 2 \Rightarrow 4x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  لايجزأ التكامل

لاحظ عدم تعويض القيم السالبة لـ (n) لان الفترة في السؤال موجبة .

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 4x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 4x) dx \right|$$

$$= \left| \left[ -\frac{1}{4} \cos 4x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| \left[ -\frac{1}{4} \cos 4x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$= \frac{1}{4} |(\cos \pi) - (\cos 0)| + \frac{1}{4} |(\cos 2\pi) - (\cos \pi)| = \frac{1}{4} |(-1) - (1)| + \frac{1}{4} |(1) - (-1)|$$

$$= \frac{1}{4} |-2| + \frac{1}{4} |2| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ وحدة مساحة}$$

2008 دور 2

تد المساحة المحددة بمنحني الدالة  $f(x) = \sin 2x$  ومحور السينات بالفترة  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sol : if  $y = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = 0 + n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2$  $n = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  يجزأ التكامل $n = 1 \Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  لايجزأ التكامل $n = -1 \Rightarrow 2x = -\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  لايجزأ التكامل

لاحظ انه سنقوم بتعويض القيم السالبة لـ (n) لان الفترة في السؤال موجبة وسالبة .

$$A = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \right| = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\sin 2x) dx \right| + \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x) dx \right|$$

$$= \left| \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \right| + \left| \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$= \frac{1}{2} |(\cos 0) - (\cos -\pi)| + \frac{1}{2} |(\cos \pi) - (\cos 0)|$$

$$= \frac{1}{2} |(1) - (-1)| + \frac{1}{2} |(-1) - (1)|$$

$$= \frac{1}{2} |2| + \frac{1}{2} |-2| = 1 + 1 = 2 \text{ وحدة مساحة}$$



ند المساحة المحددة بين المنحنين  $y = \sin^2 x$  ,  $y = \sin x$  بالفترة  $[0, \frac{\pi}{2}]$

2012 خارج القطر

**sol :**  $h(x) = \sin^2 x - \sin x = \sin x (\sin x - 1)$

$\sin x (\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \text{either } \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi$

$n = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  لايجزأ التكامل

$n = 1 \Rightarrow x = \pi \notin [0, \frac{\pi}{2}]$  لايجزأ التكامل

OR  $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  لايجزأ التكامل

لاحظ عدم تعويض القيم السالبة لـ (n)  
لان الفترة في السؤال موجبة .

$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x) dx \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) - \sin x \right] dx$

$\left| \left[ \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| = \left| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) + \cos \frac{\pi}{2} \right] - \left[ \frac{1}{2} \left( 0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) + \cos 0 \right] \right|$   
 $= \left| \frac{\pi}{4} - 1 \right| = 1 - \frac{\pi}{4} \text{ unit}^2$

لاحظ ان النصف قبل اجراء التكامل لم نستطع ان نخرجه الى خارج التكامل لأنه غير تابع لكل مابعد

ند المساحة المحددة بالمنحنين  $f(x) = 2\sin x + 1$  ,  $g(x) = \sin x$  على الفترة  $[0, \frac{3\pi}{2}]$

2013 دور 2

2015 نارحين 1

**sol :**  $h(x) = 2\sin x + 1 - \sin x = \sin x + 1$

$\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \in [0, \frac{3\pi}{2}]$  لاتجزئ التكامل

$A = \left| \int_0^{\frac{3\pi}{2}} h(x) dx \right| = \left| \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1) dx \right|$

$= \left| \left[ -\cos x + x \right]_0^{\frac{3\pi}{2}} \right|$

$= \left| \left( -\cos \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) - (-\cos 0 + 0) \right| = \left| \left( \frac{3\pi}{2} \right) - (-1) \right| = \frac{3\pi+2}{2}$  وحدة مساحة



2014 تمهيدي في

جد المساحة المحدد بالمنحني  $f(x) = \cos x$  والمنحني  $g(x) = \sin x$ وعلى الفترة  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ **sol:**  $h(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \tan x = 1$ زاوية الاسناد  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ودالة الظل تكون موجبة في الربعين الاول والثالث لذلك فان

$$x = \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \text{OR} \quad x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$A = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} h(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx \right|$$

$$= \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx \right|$$

$$= \left| \left[ \sin x + \cos x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| \left[ \sin x + \cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$= \left| \left( \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - \left( \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) + \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) \right| + \left| \left( \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) - \left( \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$= \left| \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (-1 + 0) \right| + \left| (1 + 0) - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right|$$

$$= \left| \left( \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right| + \left| 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right| = \left| \sqrt{2} + 1 \right| + \left| 1 - \sqrt{2} \right|$$

$$= (\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} \text{ وحدة مساحة}$$

جسم يتحرك على خط مستقيم وكانت سرعته  $v(t) = \frac{3}{2} \sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}} \text{ m/sec}$  وكان بعده بعد

مرور 4 ثواني من بدء الحركة يساوي 20 m جد ازاحته عند كل t

2003 دور 1

2010 تمهيدي

حل اذا علمت معادلة السرعة وطلب ايجاد الازاحة في ثانية محددة او الازاحة في اي زمن وعلم

في السؤال بعد الجسم والزمن المقطوع عنده فان نوع التكامل يكون غير محدد علما ان هذا الاحتمال تم تجاهله في المنهج الحالي ولا بأس بالتطرق اليه للاحتياط

$$s(t) = \int v(t) dt = \int \left( \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{t^{\frac{1}{2}}} \right) dt = \int \left( \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} + 3 t^{-\frac{1}{2}} \right) dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + 3 \cdot 2 t^{\frac{1}{2}} + c$$

$$s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t} + c \Rightarrow 20 = 8 + 12 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t}$$

Mob: 07902162268

164

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنات



1997 دور 1

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره  $18 \text{ m/sec}^2$  فإذا كانت سرعته قد أصبحت  $82 \text{ m/sec}$  بعد مرور  $4 \text{ sec}$  من بدء الحركة جد :

(a) المسافة خلال الثانية الرابعة .

(b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 10 ثواني .

الحل :-

$$v(t) = \int a(t) dt \Rightarrow v(t) = \int 18 dt \Rightarrow v(t) = 18t + c$$

$$v(t) = 82 \text{ عندما } t = 4$$

$$82 = 72 + c \Rightarrow c = 10 \Rightarrow v(t) = 18t + 10$$

$$\begin{aligned} \text{a) } d &= \left| \int_3^4 V(t) dt \right| = \left| \int_3^4 (18t + 10) dt \right| \\ &= \left| [9t^2 + 10t]_3^4 \right| = \left| (144 + 40) - (81 + 30) \right| \\ &= \left| 184 - 111 \right| = 73 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } s &= \int_0^{10} V(t) dt = \int_0^{10} (18t + 10) dt = [9t^2 + 10t]_0^{10} \\ &= (900 + 100) - (0 - 0) = 1000 \text{ m} \end{aligned}$$

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره  $18 \text{ m/sec}^2$  فإذا كانت سرعته قد أصبحت  $82 \text{ m/sec}$  بعد مرور  $4 \text{ sec}$  من بدء الحركة جد :

2015 دور 1

(1) المسافة خلال الثانية الثانية .

(2) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور ثانيتين .

الحل :-

$$v(t) = \int a(t) dt \Rightarrow v(t) = \int 18 dt \Rightarrow v(t) = 18t + c$$

$$v(t) = 82 \text{ عندما } t = 4$$

$$82 = 72 + c \Rightarrow c = 10 \Rightarrow v(t) = 18t + 10$$

$$1) \quad d = \left| \int_1^2 V(t) dt \right| = \dots = 37 \text{ m}$$

$$2) \quad s = \int_0^2 V(t) dt = \int_0^2 (18t + 10) dt = \dots = 56 \text{ m}$$



نسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة  $v(t) = (2t - 4) \text{ m/s}$  جد المسافة المقطوعة بالفترة

2000 دور 2

[1,6] ثم جد بعد الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة

(a) المسافة المقطوعة بالفترة [1, 6].

**sol :**  $v(t) = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \in [1, 6]$

$$\begin{aligned} d &= \left| \int_1^2 V(t) dt \right| + \left| \int_2^6 V(t) dt \right| = \left| \int_1^2 (2t - 4) dt \right| + \left| \int_2^6 (2t - 4) dt \right| \\ &= \left| [t^2 - 4t]_1^2 \right| + \left| [t^2 - 4t]_2^6 \right| \\ &= \left| (4 - 8) - (1 - 4) \right| + \left| (36 - 24) - (4 - 8) \right| \\ &= \left| -4 + 3 \right| + \left| 12 + 4 \right| = 1 + 16 = 17 \text{ m} \end{aligned}$$

(b) بعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة.

**sol :**  $s = \int_0^4 V(t) dt = \int_0^4 (2t - 4) dt = [t^2 - 4t]_0^4$   
 $= (16 - 16) - (0 - 0) = 0 \text{ m}$

إذا كانت سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم هي  $v(t) = 3t^2 + 6t + 3$  احسب

2003 دور 2

① المسافة المقطوعة بالفترة [2,4] ② الازاحة المقطوعة بالفترة [2,4]

③ الزمن اللازم ليصبح التعجيل  $18 \text{ m/sec}^2$

**sol :**  $v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 + 6t + 3 = 0 \Rightarrow 3(t^2 + 2t + 1) = 0 \Rightarrow 3(t + 1)^2 = 0$

$\Rightarrow t = -1 \notin [2, 4]$

$$\begin{aligned} d &= \left| \int_2^4 V(t) dt \right| = \left| \int_2^4 (3t^2 + 6t + 3) dt \right| \\ &= \left| [t^3 + 3t^2 + 3t]_2^4 \right| = \left| (64 + 48 + 12) - (8 + 12 + 6) \right| \\ &= \left| 124 - 26 \right| = 98 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= \int_2^4 V(t) dt = \int_2^4 (3t^2 + 6t + 3) dt \\ &= [t^3 + 3t^2 + 3t]_2^4 = (64 + 48 + 12) - (8 + 12 + 6) \\ &= 124 - 26 = 98 \text{ m} \end{aligned}$$

$a(t) = v'(t) = 6t + 6 \Rightarrow 18 = 6t + 6 \Rightarrow 6t = 12 \Rightarrow t = 2 \text{ sec}$



نسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره  $5 \text{ m/sec}^2$  فإذا كان بعده من بدء الحركة يساوي  $180 \text{ m}$  بعد مرور  $6 \text{ sec}$  والسرعة عندها  $45 \text{ m/sec}$  جد السرعة عند  $t=2$

2004 دور 2

$$v(t) = \int a(t) dt \Rightarrow v(t) = \int 5 dt \Rightarrow v(t) = 5t + c$$

الحل :-

$$v(t) = 45 \text{ عندما } t = 6$$

$$45 = 30 + c \Rightarrow c = 15 \Rightarrow v(t) = 5t + 15$$

$$v(2) = 10 + 15 = 25 \text{ m/s}$$

تلميح \\\ لو طلب إيجاد الاراحة او البعد في زمن محدد او في اي زمن عندها تجري تكاملاً غير محدد لان البعد معلوم  $180$  بعد مرور  $4$  ثواني ومنها نستخرج قيمة  $c$  وهذا السؤال يدل على ان ليس بالضرورة ان كل المعلومات التي تعطى في السؤال يمكن الاستفادة منها .

نسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل منتظم يساوي  $(3t + 2) \text{ m/s}^2$  جد سرعة الجسم بعد مضي  $2 \text{ sec}$  من بدء الحركة ثم جد المسافة المقطوعة بالفترة  $[2,6]$

2005 تميمي

$$\text{sol : } v(t) = \int a(t) dt \Rightarrow v(t) = \int (3t + 2) dt \Rightarrow v(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t + c$$

بما ان التعجيل منتظم فإنه في بدء الحركة يكون فيها  $t = 0, v = 0$  اي انه  $c = 0$

$$v(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t$$

$$\text{a) } v(2) = 6 + 4 = 10 \text{ m/s}$$

b) بما ان السرعة مجموع حدين او اكثر فلا داعي الى مساواتها بالصفر عن حساب المسافة المقطوعة بفترة معين لان الزمن وان وجد ستكون قيمته سالبة او صفر وفي الحالتين لايجزأ التكامل .

$$d = \left| \int_2^6 v(t) dt \right| = \left| \int_2^6 \left( \frac{3}{2}t^2 + 2t \right) dt \right| = \left| \left[ \frac{1}{2}t^3 + t^2 \right]_2^6 \right|$$

$$= | (108 + 36) - (4 + 4) | = | 136 | = 136 \text{ m}$$



تتحرك نقطة مادية من السكون وبعد  $t$  ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها  $(100t - 6t^2)$  m/s  
جد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه ثم احسب التعجيل عندها .

نفرض ان الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول  $n$  : sol :

$$s = \int_0^n V(t) dt = \int_0^n (100t - 6t^2) dt = [50t^2 - 2t^3]_0^n$$

$$= (50n^2 - 2n^3) - (0) = 50n^2 - 2n^3$$

∴ الجسم عاد الى النقطة التي تحرك منها فان الازاحة تساوي (0)

$$0 = 50n^2 - 2n^3 \Rightarrow 2n^2 (25 - n) = 0 \Rightarrow n = 0 \text{ يهمل } \text{OR } n = 25 \text{ sec}$$

$$a(t) = v'(t) = 100 - 12t \Rightarrow a(25) = 100 - 300 = -200 \text{ m/sec}^2$$

حل آخر //

$$s = \int V(t) dt = \int (100t - 6t^2) dt \Rightarrow s = 50t^2 - 2t^3 + c$$

بما ان الحركة من السكون فان  $(s=0, t=0)$

$$0 = 0 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow s = 50t^2 - 2t^3 \quad (s=0) \text{ فان}$$

$$0 = 50t^2 - 2t^3 \Rightarrow 2t^2 (25 - t) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ يهمل } \text{OR } t = 25 \text{ sec}$$

$$a(t) = v'(t) = 100 - 12t \Rightarrow a(25) = 100 - 300 = -200 \text{ m/sec}^2$$

2016 دور 2 خارج

تتحرك سيارة من السكون وبعد  $t$  دقيقة من بدء الحركة أصبحت سرعتها  $(50t - 3t^2)$  km/min  
جد الزمن اللازم لعودة السيارة الى موضعها الاول الذي بدأت منه ثم احسب التعجيل عند ذلك الزمن .

ans:  $t = 0$  يهمل OR  $t = 25 \text{ min}$  ,  $a(t) = -100 \text{ km/min}^2$



2013 خارج القطر

2014 دور 4 انبار

سفينة شحن تتحرك بخط مستقيم بسرعة  $v(t) = 3t^2 - 6t + 3$  m/s احسب

(1) المسافة المقطوعة ضمن الفترة الزمنية [2,4]

(2) الازاحة المقطوعة بعد مرور خمسة دقائق من بدء الحركة .

$$\text{sol : } v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t + 3 = 0 \Rightarrow 3(t^2 - 2t + 1) = 0 \Rightarrow 3(t - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \notin [2, 4]$$

$$d = \left| \int_2^4 V(t) dt \right| = \left| \int_2^4 (3t^2 - 6t + 3) dt \right|$$

$$= \left| [t^3 - 3t^2 + 3t]_2^4 \right| = \left| (64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6) \right| = |26| = 26 \text{ m}$$

$$s = \int_a^b V(t) dt = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3) dt = [t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5$$

$$= (125 - 75 + 15) - (0) = 65 \text{ m}$$

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل مقداره  $10 \text{ m/s}^2$  وبعد 2 ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعته  $24 \text{ m/s}$  جد المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة ثم بعده بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة .

2007 دور 1

2015 دور 2

الحل :-

$$v(t) = \int a(t) dt \Rightarrow v(t) = \int 10 dt \Rightarrow v(t) = 10t + c$$

$$v(t) = 24 \text{ عندما } t = 2$$

$$24 = 20 + c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow v(t) = 10t + 4$$

$$\text{a) } d = \left| \int_4^5 V(t) dt \right| = \left| \int_4^5 (10t + 4) dt \right|$$

$$= \left| [5t^2 + 4t]_4^5 \right| = \left| (125 + 20) - (80 + 16) \right| = 49 \text{ m}$$

$$\text{b) } s = \int_0^4 V(t) dt = \int_0^4 (10t + 4) dt = [5t^2 + 4t]_0^4$$

$$= (80 + 16) - (0 - 0) = 96 \text{ m}$$



جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة  $v(t) = (3t^2 + 4t + 7) \text{ m/s}$  جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة ثم جد التعجيل عندها .

2010 دور 2 دور

**sol :**  $v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 + 4t + 7 \neq 0 \Rightarrow$

تلميح || المسافة المقطوعة بعد مرور  $t$  ثانية من بدء الحركة تعني بالفترة  $[0, t]$  وليس بالضرورة ان يكون تكاملا واحدا

$$d = \left| \int_0^4 V(t) dt \right|$$

$$= \left| \int_0^4 (3t^2 + 4t + 7) dt \right| = \left| [t^3 + 2t^2 + 7t]_0^4 \right|$$

$$= \left| (64 + 32 + 28) - (0) \right| = 124 \text{ m}$$

$$a(t) = v'(t) = 6t + 4 \Rightarrow a(4) = 24 + 4 = 28 \text{ m/sec}^2$$

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة  $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 \text{ m/min}$  احسب المسافة المقطوعة بالفترة  $[0, 2]$  ثم احسب الزمن الذي يصبح فيه التعجيل  $18 \text{ m/min}^2$

2009 دور 1 دور

**sol :**  $v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Rightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 0 \Rightarrow 3(t-3)(t-1) = 0$

$\Rightarrow$  either  $t = 1 \in [0, 2]$  , or  $t = 3 \notin [0, 2]$

$$d = \left| \int_0^1 V(t) dt \right| + \left| \int_1^2 V(t) dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 (3t^2 - 12t + 9) dt \right| + \left| \int_1^2 (3t^2 - 12t + 9) dt \right|$$

$$= \left| [t^3 - 6t^2 + 9t]_0^1 \right| + \left| [t^3 - 6t^2 + 9t]_1^2 \right|$$

$$= \left| (1 - 6 + 9) - (0) \right| + \left| (8 - 24 + 18) - (1 - 6 + 9) \right| = |4| + |-2| = 6 \text{ m}$$

$$a(t) = v'(t) = 6t - 12 \Rightarrow 18 = 6t - 12 \Rightarrow 30 = 6t \Rightarrow t = 5 \text{ min}$$

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره  $(4t + 12) \text{ m/sec}^2$  فإذا كانت سرعته قد اصبحت  $90 \text{ m/sec}$  بعد مرور  $4 \text{ sec}$  احسب المسافة المقطوعة بالفترة  $[1, 2]$

2011 دور 2 دور

**sol :**  $v(t) = \int a(t) dt \Rightarrow v(t) = \int (4t + 12) dt \Rightarrow v(t) = 2t^2 + 12t + c$

$v(t) = 90$  عندما  $t = 4$

$$90 = 32 + 48 + c \Rightarrow c = 10 \Rightarrow v(t) = 2t^2 + 12t + 10$$

بما ان السرعة مجموع حدين او اكثر فلا داعي الى مساواتها بالصفر عن حساب المسافة المقطوعة بفترة معين لان الزمن وان وجد ستكون قيمته سالبة او صفر وفي الحالتين لايجزأ التكامل .

$$d = \left| \int_1^2 V(t) dt \right| = \left| \int_1^2 (2t^2 + 12t + 10) dt \right| = \left| \left[ \frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 10t \right]_1^2 \right|$$

$$= \left| \left( \frac{16}{3} + 24 + 20 \right) - \left( \frac{2}{3} + 6 + 10 \right) \right| = \left| \frac{16}{3} + 44 - \frac{2}{3} - 16 \right|$$

$$= \left| \frac{14}{3} + 28 \right| = \left| \frac{14+84}{3} \right| = \frac{98}{3} = 32.6 \text{ m}$$



جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث ان  $V(t) = 3t^2 - 6t$  فجد

(1) المسافة المقطوعة بالفترة  $[1, 3]$

تمهيدي 2016

**sol :**  $v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t = 0 \Rightarrow 3t(t - 2) = 0 \Rightarrow t = 0 \notin [1, 3]$  or  $t = 2 \in [1, 3]$

$$d = \left| \int_1^2 V(t) dt \right| + \left| \int_2^3 V(t) dt \right| = \left| \int_1^2 (3t^2 - 6t) dt \right| + \left| \int_2^3 (3t^2 - 6t) dt \right|$$

$$= \left| [t^3 - 3t^2]_1^2 \right| + \left| [t^3 - 3t^2]_2^3 \right|$$

$$= \left| (8 - 12) - (1 - 3) \right| + \left| (27 - 27) - (8 - 12) \right|$$

$$= \left| -4 + 2 \right| + \left| 0 + 4 \right| = 2 + 4 = 6 \text{ وحدة طول}$$

(2) الازاحة المقطوعة بالفترة  $[1, 3]$

**sol :**  $s = \int_1^3 V(t) dt = \int_1^3 (3t^2 - 6t) dt = [t^3 - 3t^2]_1^3$

$$= (27 - 27) - (1 - 3) = 2 \text{ وحدة طول}$$



المنطقة المحددة بالمنحني  $y = \sqrt{x}$  ,  $0 \leq x \leq 4$  ومحور السينات دارت حول محور السينات جد حجمها .

2011 خارج القطر

2013 دور 3

**sol :**  $V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = 8\pi$  وحدة مكعبة

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بين المنحني  $y = 4x^2$  والمستقيمين  $y=0, y=16$

2012 خارج القطر

2015 تمهيدي

**sol :**  $V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4} dy = \pi \left[ \frac{y^2}{8} \right]_0^{16} = \pi (32 - 0) = 32\pi$

جد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالقطع المكافئ  $y^2 = 8x$  والمستقيمين  $x=0, x=2$  حول محور السينات

2011 دور 2

2014 تمهيدي

**sol :**  $V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^2 8x dx = \pi [4x^2]_0^2 = 16\pi$  وحدة مكعبة

جد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالقطع المكافئ  $y = 2x^2$  والمستقيمين  $x=0, x=5$  حول محور السينات

2012 تمهيدي

**sol :**  $V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^5 4x^4 dx = \pi \left[ \frac{4}{5} x^5 \right]_0^5 = 2500\pi$  وحدة مكعبة

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني  $y = x^2 + 1$  والمستقيمين  $y = 1, y = 2$  حول محور الصادات

2012 دور اول

**sol :**  $y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$

$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_1^2 (y - 1) dy = \pi \left[ \frac{1}{2} y^2 - y \right]_1^2 = \pi \left[ (2 - 2) - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2} \pi \text{ unit}^3$

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني  $y = \sqrt{5} x^2$  والمستقيمين  $x = 1, x = 2$  حول المحور السيني

2012 دور 2

**sol :**  $\because y = \sqrt{5} x^2 \Rightarrow y^2 = 5 x^4$

$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_1^2 5x^4 dx = \pi \left[ \frac{5}{5} x^5 \right]_1^2 = (32 - 1) \pi = 31 \pi$  وحدة مكعبة



جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحنى  $y = x^2 + 1$  والمسيق  $y = 4$  حول المحور الصادي

2013 دور 1

2015 خارج 1

2016 دور 1

**sol :**  $y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$  if  $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_1^4 (y - 1) dy = \pi \left[ \frac{1}{2} y^2 - y \right]_1^4 = \pi \left[ (8 - 4) - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \right] = \frac{9}{2} \pi u^3$$

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحنى  $y = \frac{1}{x}$  والمستقيمين  $y = 1$  ،  $y = 2$  حول المحور الصادي

2013 دور 2

**sol :**  $\because y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy = \pi \int_1^2 y^{-2} dy = \pi \left[ \frac{-1}{y} \right]_1^2 = \pi \left( \frac{-1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \pi$$

جد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى  $y = \frac{1}{x}$  والمستقيمين  $x = 1$  ،  $x = \frac{1}{2}$  دورة كاملة حول المحور الصادي .

2015 دور 3

2015 دور 4 رسالة

**sol :**  $x = 1 \Rightarrow y = 1$  ،  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$

نفس الحل السابق .....

تأكيد || اذا كان الدوران حول محور السينات وعلمت قيمتين لـ (y) فنقوم بتعويضهما بالمعادلة الاصلية لاستخراج قيمتي (x) والعكس بالعكس علما ان هذه الملاحظة مثيرة للجدل ويبقى العمل بها مادامت في الكتاب المنهجي .  
تأكيد || في الطبعة الجديدة 2016 - 2017 تم حذف هذا السؤال وتم استبداله بالسؤال ادناه

مثال \ اوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحنى الدالة  $y = \frac{3}{x}$  حيث  $1 \leq y \leq 3$  دورة كاملة حول محور الصادات .

الحل :-

$$y = \frac{3}{x} \Leftrightarrow xy = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{y}$$

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_1^3 \frac{9}{y^2} dy = \pi \int_1^3 9y^{-2} dy = \pi \left[ \frac{-9}{y} \right]_1^3 = \pi \left( \frac{-9}{3} + 9 \right) = 6\pi u^3$$



ن: الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني  $y^2 = x^3$  والمستقيمين  $x = 0$  ,  $x = 2$  حول المحور السيني

2014 دور 2

**sol :**  $V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^2 x^3 dx = \pi \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = 4\pi$  وحدة مكعبة

ن: الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني  $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$  والمستقيمين  $y = 1$  ,  $y = 4$  حول المحور الصادي

2014 دور 3

**sol :**  $V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{1}{y} dy = \pi [\ln y]_1^4 = \pi (\ln 4 - \ln 1) = \pi \ln 4 = 2\pi \ln 2$

ن: الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني  $y = 4x^2$  والمستقيمين  $y = 0$  ,  $y = 1$  حول محور الصادات

2014 نازحين

**sol :**  $\because y = 4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y}{4} = \frac{1}{4} y$

$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_0^1 \frac{1}{4} y dy = \pi \left[ \frac{1}{8} y^2 \right]_0^1 = \pi \left( \frac{1}{8} - 0 \right) = \frac{1}{8} \pi \text{ unit}^3$



### حلول الاسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الخامس (المعادلات التفاضلية)

2005 دور 1

سؤال تابع للمشتقة حينها ويمكن ان يعاد بالصيغة التالية ليكون معادلة تفاضلية

$$y = \frac{\sin x}{a+b \cos x} \quad \text{هل ان} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a \cos x + b}{(a+b \cos x)^2} \quad \text{حلا للمعادلة التفاضلية}$$

$$\text{sol: } \frac{dy}{dx} = \frac{(a+b \cos x) \cdot \cos x - \sin x (-b \sin x)}{(a+b \cos x)^2} = \frac{a \cos b + b \cos^2 x + b \sin^2 x}{(a+b \cos x)^2}$$

$$= \frac{a \cos b + b(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(a+b \cos x)^2} = \frac{a \cos b + b}{(a+b \cos x)^2}$$

اي ان العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

2007 تمهيدي

سؤال تابع للمشتقة حينها ويمكن ان يعاد بالصيغة التالية ليكون معادلة تفاضلية

$$y = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \quad \text{هل ان} \quad \frac{dy}{dx} = 2 \tan x \sec^2 x \quad \text{حلا للمعادلة التفاضلية}$$

$$\text{sol: } y = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = \tan^2 x = (\tan x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \tan x \sec^2 x \quad \text{اي ان العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية}$$

2008 تمهيدي

سؤال تابع للمشتقة حينها ويمكن ان يعاد بالصيغة التالية ليكون معادلة تفاضلية

$$y = \cot x \quad \text{هل ان} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \csc^2 x \cot x \quad \text{حلا للمعادلة التفاضلية}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc^2 x = -(\csc x)^2 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = -2 \csc x (-\csc x \cdot \cot x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \csc^2 x \cot x \quad \text{اي ان العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية}$$

2009 دور 1

سؤال تابع للمشتقة حينها ويمكن ان يعاد بالصيغة التالية ليكون معادلة تفاضلية

$$y = \frac{\sin x}{1+\cos x} \quad \text{هل ان} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\cos x} \quad \text{حلا للمعادلة التفاضلية}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\cos x) \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\cos x} \quad \text{اي ان العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية}$$



هل ان  $y = x^3 - x - 2$  هو حلا للمعادلة التفاضلية  $\frac{d^2y}{dx^2} - 6x = 0$

2011 دور 1

2014 تمهيدي

**sol :**  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

LHS:  $\frac{d^2y}{dx^2} - 6x = 6x - 6x = 0$  : RHS **اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية**

**حل المعادلة التفاضلية**  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$

2011 دور 1

2014 نازحين

**sol :**  $(3y^2 + e^y) dy = \cos x dx$

$\Rightarrow \int (3y^2 + e^y) dy = \int \cos x dx$

$y^3 + e^y = \sin x + c$  **لاحظ الفرق بين سؤال الكتاب والسؤال الوزاري ادناه**

**حل المعادلة التفاضلية**  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2}$

2011 خارج المقرر

**sol :**  $3y^2 dy = \cos x dx \Rightarrow \int 3y^2 dy = \int \cos x dx \Rightarrow y^3 = \sin x + c$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{6y^2 + e^y}$

**حل المعادلة التفاضلية**

2015 دور 3

**sol :**  $(6y^2 + e^y) dy = \sin x dx$

$\Rightarrow \int (6y^2 + e^y) dy = \int \sin x dx$

$2y^3 + e^y = -\cos x + c$

هل ان  $y^2 = 3x^2 + x^3$  هو حلا للمعادلة التفاضلية  $y y'' + (y')^2 - 3x = 5$

2011 دور 2

**sol :**  $2y y' = 6x + 3x^2 \Rightarrow [2y y'' + y' \cdot 2y' = 6 + 6x]$  (2) بالقسمة على

$y y'' + (y')^2 = 3 + 3x \Rightarrow y y'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5 \therefore \text{LHS} \neq \text{RHS}$

**اذن العلاقة المعطاة  $y^2 = 3x^2 + x^3$  هي ليست حلا للمعادلة التفاضلية  $y y'' + (y')^2 - 3x = 5$**

هل ان  $y^2 = 3x^2 + x^3$  هو حلا للمعادلة التفاضلية  $y y'' + (y')^2 - 3x = 3$

2015 دور 1

2015 نازحين 1

ستكون العلاقة المعطاة حلا للمعادلة التفاضلية المعطاة



حل المعادلة التفاضلية  $e^x dx - y^3 dy = 0$ 

2011 دور 2

**sol :**  $y^3 dy = e^x dx \Rightarrow \int y^3 dy = \int e^x dx$

$$\frac{1}{4} y^4 = e^x + c$$

بين ان  $y = e^{2x} + e^{-3x}$  هو حلا للمعادلة التفاضلية  $y'' + y' - 6y = 0$

**sol :**  $y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$  ,  $y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$

نقوم بتعويضها بطرف المعادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

$$\begin{aligned} \text{LHS : } y'' + y' - 6y &= 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - (6)(e^{2x} + e^{-3x}) \\ &= 6e^{2x} + 6e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x} = 0 = \text{RHS} \end{aligned}$$

∴ LHS = RHS

ان العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

رهن ان  $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$  هو حلا للمعادلة التفاضلية  $y'' + 4y = 0$

**sol :**  $y' = -6\sin 2x + 4\cos 2x$  ,  $y'' = -12\cos 2x - 8\sin 2x$

نقوم بتعويضها بطرف المعادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

$$\begin{aligned} \text{LHS : } y'' + 4y &= (-12\cos 2x - 8\sin 2x) + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x) \\ &= -12\cos 2x - 8\sin 2x + 12\cos 2x + 8\sin 2x = 0 = \text{RHS} \end{aligned}$$

∴ LHS = RHS

ان العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$  حيث  $x=2$  ,  $y=2$

2012 دور 2

**sol :**  $\frac{dy}{y-1} = (x+1) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y-1} = \int (x+1) dx$

$$\ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + x + c \Rightarrow \ln|2-1| = \frac{1}{2}(4) + 2 + c \Rightarrow c = -4$$

الحل المطلوب  $\ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$



2012 دور 2

2013 دور 1

2016 تمديد

حل المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$ نفرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج  $y' = v + e^v$  ..... (1) sol :نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج  $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$  ..... (2)نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج  $v + x \frac{dv}{dx} = v + e^v$  ..... (3)نقوم بفصل المتغيرات لينتج  $x \frac{dv}{dx} = e^v \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{e^v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = e^{-v} dv \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int e^{-v} dv$ 

$$\ln|x| = -e^{-v} + c \Rightarrow \ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + c \Rightarrow \ln|x| = \frac{-1}{e^{\frac{y}{x}}} + c$$

2012 تمديد

2013 دور 1

بين ان  $y = ae^{-x}$  هو حلا للمعادلة  $y' + y = 0$  حيث  $a \in \mathbb{R}$ 

نقوم بتعويضها بطرف المعادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

sol :  $y' = -ae^{-x}$ 

$$\text{LHS : } y' + y = -ae^{-x} + ae^{-x} = 0 = \text{RHS}$$

∴ LHS = RHS إذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

برهن ان  $y = \sin x$  هو حل للمعادلة  $y'' + y = 0$ 

نقوم بتعويضها بطرف المعادلة الأيسر ليكون الجواب صفرا

sol :  $y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x$ 

$$\text{LHS : } y'' + y = -\sin x + \sin x = 0 = \text{RHS}$$

2012 خارج المقرر

إذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية  $\frac{dy}{dx} + xy = 3x$  ;  $x = 1, y = 2$ 

2013 دور 2

2014 دور 3

sol :  $\frac{dy}{dx} = 3x - xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(3 - y) \Rightarrow \frac{dy}{3-y} = x dx$ 

$$\int \frac{dy}{3-y} = \int x dx \Rightarrow -\ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$-\ln|3-2| = \frac{1}{2} + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$



2012 خارج القطر

2014 دور 4 انبار

حل المعادلة التفاضلية  $x \left( \frac{dy}{dx} - \tan \frac{y}{x} \right) = y$ 

$$\text{sol : } \left( \frac{dy}{dx} - \tan \frac{y}{x} \right) = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan v + v \quad \dots\dots\dots (1)$$

نفرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \dots\dots\dots (2)$$

نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج

$$v + x \frac{dv}{dx} = \tan v + v \quad \dots\dots\dots (3)$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x \frac{dv}{dx} = \tan v \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{\tan v} dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \cot v dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{\cos v}{\sin v} dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{\cos v}{\sin v} dv \Rightarrow \ln|x| = \ln|\sin v| + \ln|c|, \quad c > 0$$

$$\ln|x| = \ln|c(\sin v)| \Rightarrow |x| = |c(\sin v)| \Rightarrow x = \pm c(\sin v) \Rightarrow x = \pm c \left( \sin \frac{y}{x} \right)$$



حل المعادلة التفاضلية  $(3x - y) y' = x + y$ 

2013 دور 2

بقسمة البسط والمقام على  $x \neq 0$  لينتج  $\text{sol : } (3x - y) y' = x + y \Rightarrow y' = \frac{x+y}{3x-y}$ 

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{3x-y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x} + \frac{y}{x}}{\frac{3x}{x} - \frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{3 - \frac{y}{x}} \Rightarrow \text{المعادلة متجانسة}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \dots\dots\dots (1)$$

نفرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \dots\dots\dots (2)$$

نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \dots\dots\dots (3)$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{(1+v)-v(3-v)}{3-v} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1-2v+v^2}{3-v} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{(1-v)^2}{3-v}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{(3-v) dv}{(1-v)^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2+(1-v)}{(1-v)^2} dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2}{(1-v)^2} dv + \frac{(1-v)}{(1-v)^2} dv$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2}{(1-v)^2} dv + \frac{1}{(1-v)} dv \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{2}{(1-v)^2} dv + \int \frac{1}{(1-v)} dv$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = 2 \int (1-v)^{-2} dv + \int \frac{1}{(1-v)} dv \Rightarrow \ln|x| = (-2)[-(1-v)^{-1}] - \ln|1-v| + c$$

$$\Rightarrow \ln|x| + \ln|1-v| = \frac{2}{(1-v)} + c \Rightarrow \ln|x(1-v)| = \frac{2}{(1-v)} + c$$

$$\Rightarrow \ln|x(1-\frac{y}{x})| = \frac{2}{(1-\frac{y}{x})} + c \Rightarrow \ln|x-y| = \frac{2}{(\frac{x-y}{x})} + c \Rightarrow \ln|x-y| = \frac{2x}{x-y} + c$$



بين ان العلاقة  $y = x^2 + 3x$  هي حلا للمعادلة التفاضلية  $xy' = x^2 + y$

2013 دور 3

2014 دور 1

بضها بطرفى المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين  $\text{sol: } y' = 2x + 3$

$$\text{LHS: } xy' = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$$

$$\text{RHS: } x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x = 2x^2 + 3x$$

$\therefore \text{LHS} = \text{RHS} \Rightarrow xy' = x^2 + y$  العلاقة  $y = x^2 + 3x$  هي حلا للمعادلة التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية  $xy' = y - x$  حيث  $x = 1, y = 1$

2013 دور 3

2015 خارج حـ

$$\text{Sol: } \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = v - 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

نفرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \dots\dots\dots (2)$$

نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج

$$v + x \frac{dv}{dx} = v - 1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$$x \frac{dv}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dv \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = - \int dv$$

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$\ln|x| = -v + c \Rightarrow \ln|x| = -\frac{y}{x} + c \Rightarrow \ln|1| = -1 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow \ln|x| = -\frac{y}{x} + 1$$

بين ان  $\ln|y| = x^2 + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$  هو حلا للمعادلة  $y'' = 4x^2y + 2y$

2013 خارج القطر

2015 دور 2

$$\text{sol: } \frac{1}{y} y' = 2x \Rightarrow y' = 2xy \Rightarrow$$

$$y'' = 2x y' + 2y \Rightarrow y'' = 2x (2xy) + 2y \Rightarrow y'' = 4x^2 y + 2y$$

نقوم بتعويضها بطرفى المعادلة التفاضلية للحصول على طرفى متساويين

$$\text{LHS: } y'' = 4x^2 y + 2y, \quad \text{RHS: } 4x^2 y + 2y$$

$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$  ان العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية



حل المعادلة التفاضلية  $2xy y' - y^2 + x^2 = 0$ 

2013 خارج القطر

sol :  $2xyy' = y^2 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

بقسمة البسط والمقام على  $x^2 \neq 0$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2 - x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2 - 1}{2(\frac{y}{x})} \Rightarrow \text{المعادلة متجانسة}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(v)^2 - 1}{2(v)} \dots\dots\dots (1)$$

نفرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \dots\dots\dots (2)$$

نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} \dots\dots\dots (3)$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1 - 2v^2}{2v} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{-v^2 - 1}{2v}$$

$$-(v^2 + 1) dx = 2xv dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-2v dv}{v^2 + 1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \frac{2v dv}{v^2 + 1} \Rightarrow \ln|x| = - \ln|v^2 + 1| + \ln c, c > 0$$

$$\ln|c| = \ln|x| + \ln|v^2 + 1|$$

$$\ln|c| = \ln|x(v^2 + 1)| \Rightarrow c = \pm x(v^2 + 1) \Rightarrow c = \pm x[(\frac{y}{x})^2 + 1]$$

$$c = \pm x(\frac{y^2}{x^2} + 1) \Rightarrow c = \pm x(\frac{y^2 + x^2}{x^2}) \Rightarrow c = \pm (\frac{y^2 + x^2}{x})$$



بين ان  $\ln y^2 = x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  هو حلا للمعادلة  $2y' - y = 0$ 

2014 دور 2

**sol :**  $(\frac{1}{y^2}) (2y) y' = 1 \Rightarrow \frac{2}{y} y' = 1 \Rightarrow 2y' = y \Rightarrow 2y' - y = 0$

ان العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية  $(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$ 

2014 دور 2

**sol :**  $xydy = -(y^2 - x^2)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$

بقسمة البسط والمقام على  $x^2 \neq 0$  لينتج

المعادلة متجانسة  $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 - y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - (\frac{y}{x})^2}{(\frac{y}{x})}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - v^2}{v}$  ..... (1)

نفرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج

$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$  ..... (2)

نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج

$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{v}$  ..... (3)

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{v} - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2 - v^2}{v} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - 2v^2}{v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{v dv}{1 - 2v^2}$

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v dv}{1 - 2v^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \frac{-1}{4} \int \frac{-4v dv}{1 - 2v^2} \Rightarrow \ln|x| = \frac{-1}{4} \ln|1 - 2v^2| + \ln c$ ,  $c > 0$

$\ln|x| = -\ln|(1 - 2v^2)^{\frac{1}{4}}| + \ln c \Rightarrow \ln|c| = \ln|(1 - 2v^2)^{\frac{1}{4}}| + \ln|x|$

$\ln|c| = \ln|x \sqrt[4]{1 - 2v^2}| \Rightarrow c = \pm x \sqrt[4]{1 - 2v^2} \Rightarrow c = \pm x \sqrt[4]{1 - 2(\frac{y}{x})^2}$



2014 دور 3

اثبت ان  $y = x \ln x$  احد حلول المعادلة  $x \frac{dy}{dx} = x + y$  ,  $x > 0$ 

**sol :**  $\frac{dy}{dx} = (x) \left( \frac{1}{x} \right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

LHS :  $x \frac{dy}{dx} = x(1 + \ln x) = x + x \ln x$

RHS :  $x + y = x + x \ln x = x + x \ln x$

$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$

ان العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

2016 تمميدي

اثبت ان  $y = x \ln x - x$  احد حلول المعادلة  $x \frac{dy}{dx} = x + y$  ,  $x > 0$ 

**sol :**  $\frac{dy}{dx} = (x) \left( \frac{1}{x} \right) + (\ln x)(1) - 1 = \ln x$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

LHS :  $x \frac{dy}{dx} = x \ln x$

RHS :  $x + y = x + x \ln x - x = x \ln x$

$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$

ان العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية  $\tan^2 y \, dy = \sin^3 x \, dx$ 

2014 دور 4 انبار

**sol :**  $\int \tan^2 y \, dy = \int \sin^3 x \, dx \Rightarrow$

$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int \sin x \cdot \sin^2 x \, dx$

$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int \sin x \cdot (1 - \cos^2 x) \, dx$

$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int (\sin x - \cos^2 x \cdot \sin x) \, dx$

$\tan y - y = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c$

برهن ان  $y = \cos x$  هو حل للمعادلة  $y'' + y = 0$ 

2014 نارم

**sol :**  $y' = -\sin x \Rightarrow y'' = -\cos x$

LHS :  $y'' + y = -\cos x + \cos x = 0 = \text{RHS}$

ان العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

Mob: 07902162268

184

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



$$y' = \frac{\cos^2 y}{x}$$

$$y = \frac{\pi}{4}, x = 1$$

حل المعادلة التفاضلية

2014 تمهيدي

$$\text{sol : } \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{x} \Rightarrow \sec^2 y dy = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \sec^2 y dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \tan y = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = \ln 1 + c \Rightarrow 1 = 0 + c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \tan y = \ln|x| + 1$$

$$2x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad \text{حل المعادلة التفاضلية}$$

2012 دور 1

2012 تمهيدي

2014 دور 1

2015 تمهيدي

2015 دور 1

$$\text{sol : } \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + (\frac{y}{x})^2}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + V^2}{2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

نرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \dots\dots\dots (2)$$

نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + V^2}{2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2} - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \left( \frac{1 + v^2 - 2v}{2} \right) \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} (v^2 - 2v + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} (v - 1)^2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} dx}{x} = \frac{1}{(v - 1)^2} dv \Rightarrow \int \frac{\frac{1}{2} dx}{x} = \int \frac{1}{(v - 1)^2} dv$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} = \int (v - 1)^{-2} dv \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|x| = -(v - 1)^{-1} + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln|x| = \frac{-1}{v - 1} + c \Rightarrow \frac{-1}{v - 1} = \frac{1}{2} \ln|x| - c \Rightarrow \frac{-1}{v - 1} = \frac{\ln|x| - 2c}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{v - 1}{-1} = \frac{2}{\ln|x| - 2c} \Rightarrow v - 1 = \frac{-2}{\ln|x| - 2c} \Rightarrow v = 1 - \frac{2}{\ln|x| - 2c}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = 1 - \frac{2}{\ln|x| - 2c} \Rightarrow y = x - \frac{2x}{\ln|x| - 2c}$$

$$\text{let } 2c = c_1 \Rightarrow y = x - \frac{2x}{\ln|x| - c_1}$$

Mob: 07902162268

185

اعدادية الكاظمية للبنين



اثبت ان  $2x^2 + y^2 = 1$  هو حلا للمعادلة  $y^3 y'' = -2$ 

2015 خارجي 1

2016 داخلي 2

$$\text{sol: } 4x + 2y y' = 0 \Rightarrow 2y y' = -4x \Rightarrow y' = \frac{-2x}{y}$$

$$y'' = \frac{(y)(-2) - (-2x)(y')}{y^2} = \frac{-2y + 2x(y')}{y^2} = \frac{-2y + 2x(\frac{-2x}{y})}{y^2} = \frac{-2y^2 - 4x^2}{y^2}$$

$$= \frac{-2y^2 - 4x^2}{y^3} = \frac{-2(y^2 + 2x^2)}{y^3} = \frac{-2}{y^3}$$

م بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

$$\text{LHS: } y^3 y'' = y^3 \left( \frac{-2}{y^3} \right) = -2 = \text{RHS}$$

∴ LHS = RHS ان العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

تذكير || اذا كان الاشتقاق ضمنيا وكانت المعادلة التفاضلية تحتوي على نوع واحد من المشتقات فيفضل تبسيط المشتقة الاولى قبل الانتقال الى المشتقة الثانية اما اذا كانت تحتوي على اكثر من نوع من المشتقات فيفضل الانتقال الى المشتقة الثانية مباشرة بعد حساب المشتقة الاولى

ملاحظة || يمكن ان يكون السؤال السابق هو:-

هل ان  $2x^2 + y^2 = 1$  هو حلا للمعادلة  $y y'' + (y')^2 = -2$ 

$$\text{Sol: } 4x + 2y y' = 0 \Rightarrow 4 + 2y y'' + y' \cdot 2y' = 0 \Rightarrow [2y y'' + 2(y')^2 + 4 = 0] \div 2$$

$$y y'' + (y')^2 + 2 = 0 \Rightarrow y y'' + (y')^2 = -2$$



حل المعادلة التفاضلية  $(x + 2y)dx + (2x + 3y)dy = 0$ 

2015 تاريخ

sol :  $(2x + 3y)dy = - (x + 2y)dx$ 

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x - 2y}{2x + 3y} \quad \text{نقسم البسط والمقام على } x \neq 0 \text{ لينتج}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-x - 2y}{x}}{\frac{2x + 3y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1 - 2(\frac{y}{x})}{2 + 3(\frac{y}{x})}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 - 2v}{2 + 3v} \quad \dots\dots\dots (1)$$

نفرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \dots\dots\dots (2)$$

نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 2v}{2 + 3v} \quad \dots\dots\dots (3)$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 2v}{2 + 3v} - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 2v - v(2 + 3v)}{2 + 3v} \Rightarrow$$

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 2v - 2v - 3v^2}{2 + 3v} \Rightarrow -x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + 4v + 3v^2}{2 + 3v}$$

$$\frac{-dx}{x} = \frac{2 + 3v}{1 + 4v + 3v^2} dv \Rightarrow \int \frac{-dx}{x} = \int \frac{2 + 3v}{1 + 4v + 3v^2} dv$$

$$\text{let } u = 1 + 4v + 3v^2 \\ u' = 4 + 6v = 2(2 + 3v)$$

$$-\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int \frac{2(2 + 3v)}{1 + 4v + 3v^2} \Rightarrow -\ln|x| = \frac{1}{2} \ln|1 + 4v + 3v^2| + c$$

$$-c = \ln|(1 + 4v + 3v^2)^{\frac{1}{2}}| + \ln|x|$$

$$\Rightarrow \ln c_1 = \ln|x \cdot \sqrt{1 + 4v + 3v^2}|, c_1 > 0 \Rightarrow c_1 = |x \cdot \sqrt{1 + 4v + 3v^2}|$$

$$\Rightarrow c_1 = |x \cdot \sqrt{1 + \frac{4y}{x} + \frac{3y^2}{x^2}}| \Rightarrow c_1 = |x \cdot \sqrt{\frac{x^2 + 4xy + 3y^2}{x^2}}|$$



2015 دور 2 خارج

حل المعادلة التفاضلية  $(y^2 - xy) = -x^2 dy$ 

$$\text{sol : } x^2 dy = -(y^2 - xy)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy - y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = v - v^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

نفرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \dots\dots\dots (2)$$

نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج

$$v + x \frac{dv}{dx} = v - v^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

$$x \frac{dv}{dx} = -v^2 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-dv}{v^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -v^{-2} dv$$

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$\int \frac{dx}{x} = \int -v^{-2} dv \Rightarrow \ln|x| = v^{-1} + c \Rightarrow \ln|x| = \frac{1}{v} + c \Rightarrow \ln|x| = \frac{1}{\frac{y}{x}} + c$$

$$\ln|x| = \frac{x}{y} + c \Rightarrow \frac{x}{y} = \ln|x| - c \Rightarrow y = \frac{x}{\ln|x| - c}$$

هل ان  $yx = \sin 5x$  حلا للمعادلة  $xy'' + 2y' + 25yx = 0$ 

2015 دور 2 خارج

$$\text{Sol : } y + x y' = 5 \cos 5x \Rightarrow y' + xy'' + y' = -25 \sin 5x$$

2016 دور 1 في

$$xy'' + 2y' + 25 \sin 5x = 0 \Rightarrow xy'' + 2y' + 25xy = 0$$

ان العلاقة المعطاة هي حلا للمعادلة التفاضلية

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية  $(x+1) \frac{dy}{dx} = 2y$ 

2015 دور 2

sol : نجعل المعادلة التفاضلية بالصورة  $g(y)dy = f(x)dx$ 

$$(x+1)dy = 2y dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x+1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x+1} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln(x+1) + c$$

$$\ln|y| = \ln(x+1)^2 + c \Rightarrow \ln|y| = \ln(x+1)^2 + \ln c_1$$

$$\ln|y| = \ln c_1(x+1)^2 \Rightarrow |y| = c_1(x+1)^2$$

Mob: 07902162268

188

اعدادية الكاظمية للبنين  
اعدادية الكاظمية للبنين



$$y' = \frac{y^2}{xy + x^2} \quad \text{حل المعادلة التفاضلية}$$

sol :

بقسمة البسط والمقام على  $x^2 \neq 0$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy + x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x} + 1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right) + 1} \Rightarrow \text{المعادلة متجانسة}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{v+1} \quad \text{..... (1)}$$

نفرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \text{..... (2)}$$

نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1} \quad \text{..... (3)}$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1} - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - v(v+1)}{v+1} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - v^2 - v}{v+1} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{-v}{v+1}$$

$$x(v+1) dv = -v dx \Rightarrow \int \frac{(v+1) dv}{v} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{v}{v} dv + \int \frac{1}{v} dv = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int dv + \int \frac{1}{v} dv = - \int \frac{dx}{x}$$

$$v + \ln|v| = -\ln|x| + c \Rightarrow \frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + c$$

تعقيب || بالرغم من ان السؤال غير موجود نصا في الكتاب المنهجي الا ان فكرته منهجية ويعتبر من الاسئلة

المتوسطة الصعوبة او ماهو دون ذلك ويكون السؤال اكثر صعوبة قليلا ان كان التكامل بالشكل التالي

$$\int \frac{v dv}{v+1} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{[(v+1)-1] dv}{v+1} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{(v+1) dv}{v+1} - \int \frac{1}{v+1} dv = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int dv - \int \frac{dv}{v+1} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$v - \ln|v+1| = -\ln|x| + c \Rightarrow \frac{y}{x} - \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| = -\ln|x| + c$$



جد الحل العام للمعادلة التفاضلية  $xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$ 

2016 دور 1 في

**sol :**  $xy \frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2 \Rightarrow xy dy = (1 - 2y^2) dx$

$$\frac{y}{1-2y^2} dy = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{y}{1-2y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right) \int \frac{-4y}{1-2y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right) \ln|1-2y^2| = \ln|x| + c$$

$$\ln|(1-2y^2)^{-\frac{1}{4}}| = \ln|x| + \ln c_1, c_1 > 0$$

$$\ln|(1-2y^2)^{-\frac{1}{4}}| = \ln|c_1 x| \Rightarrow |(1-2y^2)^{-\frac{1}{4}}| = |c_1 x|$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-2y^2}} = c_1 x \quad \text{الحل العام للمعادلات التفاضلية}$$

أوجد حل المعادلة التفاضلية  $y' - x\sqrt{y} = 0$  عندما  $x=2, y=9$ 

2016 دور اول

**sol :** نجعل المعادلة التفاضلية بالصورة  $g(y)dy = f(x)dx$ 

$$\frac{dy}{dx} - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = x dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int x dx$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow x=2, y=9 \Rightarrow 2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(2)^2 + c$$

$$6 = 2 + c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 4$$

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow 4\sqrt{y} = x^2 + 2c \Rightarrow 4\sqrt{y} = x^2 + c_1$$

$$\because x=2, y=9 \Rightarrow 4\sqrt{9} = (2)^2 + c_1 \Rightarrow 12 = 4 + c_1 \Rightarrow c_1 = 8$$

$$4\sqrt{y} = x^2 + 8 \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{4}x^2 + 2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right)^2$$

اسلوب الكتاب  
يفضل ولا يجب  
اجراءه



$$x^2 y \, dx = (x^3 + y^3) \, dy$$

بقسمة البسط والمقام على  $x^3 \neq 0$  **sol :**  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 y}{x^3}}{\frac{x^3 + y^3}{x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{y^3}{x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})}{1 + (\frac{y}{x})^3} \Rightarrow \text{المعادلة متجانسة}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{1 + v^3} \dots\dots\dots (1)$$

نفرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \dots\dots\dots (2)$$

نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{v}{1 + v^3} \dots\dots\dots (3)$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v}{1 + v^3} - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{v - v(1 + v^3)}{1 + v^3} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{v - v - v^4}{1 + v^3} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1 + v^3}$$

$$\Rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{1 + v^3}{v^4} dv \Rightarrow \int -\frac{dx}{x} = \int \frac{1 + v^3}{v^4} dv \Rightarrow -\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{v^4} dv + \int \frac{v^3}{v^4} dv$$

$$-\int \frac{dx}{x} = \int v^{-4} dv + \int \frac{1}{v} dv \Rightarrow -\ln|x| = -\frac{1}{3} v^{-3} + \ln|v| + \ln|c|, c > 0$$

$$-\ln|x| = -\frac{1}{3v^3} + \ln|v| + \ln|c| \Rightarrow \frac{1}{3v^3} = \ln|x| + \ln|v| + \ln|c|$$

$$\frac{1}{3v^3} = \ln|cxv| \Rightarrow \frac{1}{3(\frac{y}{x})^3} = \ln|cx(\frac{y}{x})|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{3y^3}{x^3}} = \ln|cy| \Rightarrow \frac{x^3}{3y^3} = \ln|cy| \Rightarrow y^3 = \frac{x^3}{3\ln|cy|} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt[3]{3\ln|cy|}}$$



2016 دور 2

حل المعادلة التفاضلية الآتية  $(x^2 + 3y^2)dx - 2xy dy = 0$ 

$$\text{sol : } 2xydy = (x^2 + 3y^2) dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$$

بقسمة البسط والمقام على  $x^2 \neq 0$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 + 3y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})} \rightarrow \text{المعادلة متجانسة}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3v^2}{2v}$$

نفرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + 3v^2}{2v}$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + 3v^2}{2v} - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + 3v^2 - 2v^2}{2v} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2v dv}{1 + v^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2v dv}{1 + v^2} \Rightarrow \ln|x| = \ln|1 + v^2| + \ln c, c > 0$$

$$\ln|x| = \ln|c(1 + v^2)| \Rightarrow |x| = |c(1 + v^2)|$$

$$x = \mp c(1 + v^2) \Rightarrow x = \mp c(1 + (\frac{y}{x})^2) \Rightarrow x = \mp c(1 + \frac{y^2}{x^2})$$

التقييم | السؤال من التمارين العامة الخاصة بالكتاب المقرر ويعد من الاسئلة المتوسطة الصعوبة . ويمكن للطالب عدم  
( $\frac{y}{x}$ ) بكتابة السطرين الاخيرين وينتهي السؤال بمجرد اجراء التكامل على ان يستبدل



2016 دور 2 خارج

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} \quad \text{حل المعادلة التفاضلية}$$

sol :

لينتج

بقسمة البسط والمقام على  $x^2 \neq 0$ 

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2 - x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \Rightarrow \text{المعادلة متجانسة}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(v)^2 - 1}{2(v)} \quad \dots\dots\dots (1)$$

نفرض ان  $\frac{y}{x} = v$  لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \dots\dots\dots (2)$$

نشتق العلاقة  $y = vx$  بالنسبة الى المتغير  $x$  لينتج

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{3(v)^2 - 1}{2(v)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

نعوض المعادلة (2) بالمعادلة (1) لينتج

نقوم بفصل المتغيرات لينتج

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1 - 2v^2}{2v} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

$$(v^2 - 1) dx = 2v x dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2v dv}{v^2 - 1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2v dv}{v^2 - 1} \Rightarrow \ln|x| = \ln|v^2 - 1| + \ln c, \quad c > 0$$

$$\ln|x| = \ln|c(v^2 - 1)| \Rightarrow x = \pm c(v^2 - 1)$$

$$\Rightarrow c = \pm \left( \frac{x}{v^2 - 1} \right) \Rightarrow c = \pm \left( \frac{x}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} \right) \Rightarrow c = \pm \frac{x}{\frac{y^2}{x^2} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \pm \frac{x}{\frac{y^2 - x^2}{x^2}} \Rightarrow c = \pm \frac{x^3}{y^2 - x^2}$$

يفضل ولا يجب التبسيط اى تقبل وزاريا دون تبسيط



نُمة بهونه نهاله

للمزيد من المهام والدروس وكل ما يخص طلبة السادس  
الأعدادي زورونا على مواقع التواصل الاجتماعي ...



رحلة التفوق في السادس



رحلة التفوق في السادس



[telegram.me/A\\_M\\_Z\\_F](https://t.me/A_M_Z_F)



رحلة التفوق في السادس



[www.instagram.com/rt\\_edu](https://www.instagram.com/rt_edu)

رحلة التفوق في السادس

عطاء بلا حدود

ا.د اشرف الوائلي

ا.د مينا الاحمد